

## 6 - ECOULEMENT DE FLUIDE PARFAIT COMPRESSIBLE À POTENTIEL DE VITESSE.

On étudie ici les conséquences de l'abandon de l'hypothèse d'incompressibilité du fluide sur l'écoulement mais en conservant l'hypothèse d'un fluide parfait non visqueux. Les équations sont établies. On examine le cas particulier de l'onde sonore dans un fluide homogène et isotrope au repos. On considère ensuite un écoulement quasi monodimensionnel dans une section de conduite de section variable où les conditions à l'entrée et à la sortie sont imposées. On aborde ainsi la détente isentropique et le choc de re-compression (choc droit, choc oblique).

Ces deux exemples font ressortir les effets de la compressibilité négligés dans les chapitres précédents.

Enfin on formalise les équations générales qui régissent l'écoulement à potentiel de vitesse compressible et on propose une méthode de calcul de solution.

Certains calculs détaillés présentés en plus petits caractères sont logiquement dans le fil du texte mais ils auraient pu figurer en annexe.

### 1. Les équations du problème.

#### 1.1- Loi de la mécanique (conservation de la quantité de mouvement).

L'équation de la mécanique qui relie la force  $\mathbf{F}$  à l'accélération  $\boldsymbol{\gamma}^{(*)}$  subie par une masse  $m$  de vitesse  $\mathbf{V}$  de composantes  $(u, v, w)$  est :

$$\mathbf{F} = m \cdot \boldsymbol{\gamma} = m \cdot d\mathbf{V}/dt \quad (1)$$

C'est la conservation de la quantité de mouvement.

*(\*) Ici le vecteur accélération  $\boldsymbol{\gamma}$  n'a rien à voir avec  $\gamma = c_p/c_v$  des paragraphes suivant qui est le rapport des compressibilités à pression constante et à volume constant d'un gaz.*

Rappelons qu'il faut appliquer cette loi à une particule fluide c'est à dire un ensemble de molécules de fluide contenu dans un petit volume  $V$  limité par une surface  $S$  autour d'un point  $M$  dont on repère la position qui dépend du temps par ses coordonnées  $x(t), y(t), z(t)$  ou  $\mathbf{r}(t)$ , la surface  $S$  pouvant changer au cours du temps.

On note en gras les vecteurs ( $\mathbf{r}, \mathbf{V}$ , etc.).

La notation  $df/dt$  signifie qu'on considère les variations relatives  $df$  de la grandeur  $f(x, y, z, t)$  (scalaire ou coordonnées d'un vecteur) en suivant la particule dans son mouvement pendant l'intervalle de temps  $dt$ . C'est la dérivée particulaire ou Lagrangienne.

La dérivée « Eulérienne »  $\partial f/\partial t$  est la dérivée partielle classique qui représente le rapport de la variation  $df$  de la grandeur  $f$  pendant le laps de temps  $dt$ , les autres variables  $x, y, z$  restant constantes.

La grandeur  $f(x, y, z, t)$  peut varier de  $\Delta f$  pendant le laps de temps  $\Delta t$  en un point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  fixé et le rapport  $\Delta f/\Delta t = \partial f/\partial t$  est la dérivée temporelle Eulérienne (dérivée partielle par rapport au temps classique).

La grandeur  $f$  peut aussi varier en fonction du temps si la particule considérée se déplace de  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  pendant le laps de temps  $\Delta t$ .

La variation  $\Delta f$  de  $f$  est alors :  $\Delta f = (\partial f/\partial t) \cdot \Delta t + (\partial f/\partial x) \cdot \Delta x + (\partial f/\partial y) \cdot \Delta y + (\partial f/\partial z) \cdot \Delta z$ .  
et la dérivée particulaire notée  $df/dt$  s'écrit :

$$df/dt = \Delta f/\Delta t = \partial f/\partial t + (\partial f/\partial x).(\Delta x/\Delta t) + (\partial f/\partial y).(\Delta y/\Delta t) + (\partial f/\partial z).(\Delta z/\Delta t)$$

On introduit le vecteur gradient de f noté **grad**(f) de composantes  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$ ,  $\partial f/\partial z$  et on remarque que le vecteur de composantes  $\Delta x/\Delta t$ ,  $\Delta y/\Delta t$ ,  $\Delta z/\Delta t$  est le vecteur vitesse  $\mathbf{V}(x, y, z, t)$  de composantes u, v, w de la particule fluide au point M à l'instant t on obtient :

$$df/dt = \partial f/\partial t + u. \partial f/\partial x + v. \partial f/\partial y + w. \partial f/\partial z \text{ ou}$$

$$df/dt = \partial f/\partial t + \mathbf{V}.\mathbf{grad}(f) \quad (2)$$

Si on néglige les effets de la viscosité et toutes les forces « extérieures » subies par une particule fluide (pesanteur, forces électromagnétiques, etc.) la seule force qui s'applique à une particule fluide est la force de pression exercée sur elle par ses voisines.

L'équation de la mécanique s'écrit alors pour la composante suivant x par exemple:

$$- \partial p/\partial x = \rho.(\partial u/\partial t + u. \partial u/\partial x + v. \partial u/\partial y + w. \partial u/\partial z)$$

et en notation vectorielle :

$$- \mathbf{grad}(p) = \rho.d\mathbf{V}/dt = \rho.[\partial\mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{V}.\mathbf{grad})\mathbf{V}]$$

Le terme  $(\mathbf{V}.\mathbf{grad})\mathbf{V}$  peut s'écrire  $\mathbf{grad}(V^2/2) - \mathbf{V}\otimes\mathbf{rot}(\mathbf{V})$  où  $\mathbf{rot}(\mathbf{V})$  est le rotationnel du vecteur  $\mathbf{V}$  de module  $V = |\mathbf{V}|$ .

Dans le cadre des hypothèses (fluide parfait non visqueux) la loi fondamentale de la mécanique (conservation de la quantité de mouvement) s'écrit donc :

$$\rho.[\partial\mathbf{V}/\partial t + \mathbf{grad}(V^2/2) - \mathbf{V}\otimes\mathbf{rot}(\mathbf{V})] = - \mathbf{grad}(p)$$

C'est l'équation d'Euler.

Pour qu'un écoulement compressible soit à potentiel de vitesse il faut (comme en incompressible) que  $\mathbf{rot}(\mathbf{V})$  soit nul et on a

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}(\varphi).$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\rho.[\partial\mathbf{V}/\partial t + \mathbf{grad}(V^2/2)] = - \mathbf{grad}(p) \quad (3)$$

## 1.2 Conservation de la masse.

La masse m du fluide contenu dans le volume  $V(t)$  s'écrit :

$$m(t) = \iiint_{V(t)} \rho(x, y, z, t)dx.dy.dz$$

Le volume de fluide  $V(t) = V(x(t), y(t), z(t))$  enfermé dans la surface  $S(t)$  change en fonction du temps puisque le champ de vitesse  $\mathbf{V}(t)$  n'est pas uniforme

La variation de masse pendant l'intervalle de temps dt est due à la variation de  $\rho$  en fonction du temps en  $(x(t), y(t), z(t))$  et à la variation du volume  $V(t)$  de la particule fluide. En

appliquant les règles de dérivation d'une intégrale dont les bornes dépendent des variables on trouve :

$$dm/dt = \iiint_V (\partial\rho/\partial t).dV + \iint_S \rho.\mathbf{V}.\mathbf{n}.dS$$

En appliquant le théorème de Gauss à la deuxième intégrale qui représente la masse de fluide perdue (ou gagnée) pendant dt à cause de la déformation de la surface S enfermant la particule fluide au cours de son déplacement on a :

$$\iint_S \rho.\mathbf{V}.\mathbf{n}.dS = \iiint_V \operatorname{div}(\rho.\mathbf{V}).dV \text{ et donc :}$$

$$dm/dt = \iiint_V (\partial\rho/\partial t).dV + \iiint_V \operatorname{div}(\rho.\mathbf{V}).dV = 0 \text{ d'où l'équation de conservation de la masse :}$$

$$\iiint_V (\partial\rho/\partial t).dV + \iiint_V \operatorname{div}(\rho.\mathbf{V}).dV = 0. \quad (4')$$

la surface S étant quelconque, la conservation de la masse implique donc que:

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho.\mathbf{V}) = 0 \quad (4)$$

On peut noter que s'il y a apport de masse le second membre de (4') et (4) n'est pas nul. Ce sont les équations (3) et (4) (ou (4')) qui, avec les conditions aux limites, gouvernent le mouvement d'un fluide compressible non visqueux (équations d'Euler).

Mais du fait que  $\rho$  n'est plus constant, les équations (3) et (4) sont plus compliquées qu'en incompressible : l'équation de conservation de la masse qui était linéaire  $\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0$  en incompressible devient non linéaire en compressible  $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho.\mathbf{V}) = 0$  puisque  $\rho$  et  $\mathbf{V}$  dépendent l'un de l'autre.

### 1.3 Conservation de l'énergie et équation d'état.

On ajoute l'équation de la conservation de l'énergie qui, pour une transformation adiabatique conduit à :

$$p/(\rho^\gamma) = \text{Constante} = p_0/(\rho_0^\gamma) \quad (5)$$

Où  $\gamma$  est le rapport ( $c_p/c_v$ ) des compressibilités à pression constante  $c_p$  et à volume constant  $c_v$ .  $\gamma$  ne dépend pas de la température pour un gaz « calorifiquement parfait ». Pour l'air  $\gamma = 1.4$ .

### 1.4 Équation d'état.

L'équation d'état d'un gaz parfait :

$$p/\rho = R.T/M_m \quad (6)$$

R étant la constante des gaz et  $M_m$  la masse molaire.

les équations (5) et (6) permettent de relier une variation  $d\rho$  de  $\rho$  à une variation  $dp$  de  $p$ . Avec (5)  $dp/p = \gamma. d\rho/\rho$  d'où  $dp/d\rho = \gamma.p/\rho$  et avec (6)  $dp/d\rho = \gamma.R.T/M_m$ . On verra que  $\gamma.R.T/M_m = c^2$  en notant  $c$  la célérité du son :

$$c^2 = (\gamma.R.T/M_m)^{1/2} = \gamma.p/\rho \quad (7)$$

et on peut exprimer  $p$ ,  $\rho$  en fonction de  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$  (valeur correspondant à l'état  $V = 0$ ) et  $c$ .

$$p/p_0 = (c^2/c_0^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (8)$$

$$\rho/\rho_0 = (c^2/c_0^2)^{1/(\gamma-1)} \quad (9)$$

### 1. 5 Établissement d'une équation pour le potentiel.

L'équation vectorielle (3) et les trois équations scalaires (4), (5), et (6) permettent de déterminer les trois composantes de la vitesse et les grandeurs  $p$ ,  $\rho$  et  $T$ .

L'écoulement est à potentiel de vitesse pourvu que  $\text{rot}(\mathbf{V}) = 0$  et donc :  $\mathbf{V} = \mathbf{grad}(\varphi)$ .

C'est l'équation de conservation de la masse qui est la plus malmenée par les effets de la compressibilité. Alors qu'en incompressible c'est simplement  $\text{div}(\mathbf{V}) = 0$  (qui conduit directement à  $\Delta\varphi = 0$  c'est à dire l'équation de Laplace) elle est ici bien plus compliquée. L'équation (4)  $\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho.\mathbf{V}) = 0$  peut être transformée comme suit en divisant par  $\rho_0$  (constant) qui est la masse volumique du fluide quand sa vitesse est nulle.

$$\partial(\rho/\rho_0)/\partial t + \text{div}\{(\rho/\rho_0).\mathbf{V}\} = 0 \text{ ou}$$

$$\partial(\rho/\rho_0)/\partial t + \text{div}\{(\rho/\rho_0 - 1).\mathbf{V}\} + \text{div}(\mathbf{V}) = 0$$

d'où

$$\text{div}(\mathbf{V}) = \text{div}\{(1 - \rho/\rho_0).\mathbf{V}\} - \partial(\rho/\rho_0)/\partial t$$

qui exprime que  $\text{div}(\mathbf{V})$  n'est pas nul mais est lié aux variations de la masse volumique.

Avec  $\mathbf{V} = \mathbf{grad}(\varphi)$  on obtient:

$$\Delta\varphi = \text{div}\{(1 - \rho/\rho_0).\mathbf{grad}(\varphi)\} - \partial(\rho/\rho_0)/\partial t \quad (10)$$

Pour trouver la solution d'une telle équation il faut que le second membre dépende « le moins possible » de la fonction à déterminer  $\varphi$ .

Exprimons le terme  $\partial(\rho/\rho_0)/\partial t$  à l'aide des équations (3), (8) et (9).

L'équations (3) :

$$\rho.\{\partial\mathbf{V}/\partial t + \mathbf{grad}(V^2/2)\} = -\mathbf{grad}(p) \quad (11)$$

Avec (8) et (9) on peut écrire :

$$\mathbf{grad}(p)/\rho = \mathbf{grad}\{c^2/(\gamma - 1)\} \quad (12)$$

et (3) donne :  $\mathbf{grad}\{\partial\varphi/\partial t + V^2/2 + c^2/(\gamma - 1)\} = 0$  d'où :

$$\partial\varphi/\partial t + V^2/2 + c^2/(\gamma - 1) = \text{Constante} = c_0^2/(\gamma - 1) \quad (13)$$

$c_0$  étant la célérité du son correspondant à l'état  $V = 0$ . (13) est l'équation de Cauchy - Lagrange qui « remplace » l'équation de Bernoulli.

Avec (9) et (13) on obtient :

$$\rho/\rho_0 = \{1 - (\gamma - 1).(\partial\varphi/\partial t + V^2/2)/c_0^2\}^{1/(\gamma - 1)}$$

En admettant que  $(\gamma - 1) \cdot (\partial\phi/\partial t + V^2/2)/c_0^2 = \varepsilon < 1^*$  on peut développer en série  $\rho/\rho_0$  et on a :

$$\partial(\rho/\rho_0)/\partial t = - (1/c_0^2) \cdot \partial^2\phi/\partial t^2 + \text{termes non linéaires} \quad (14)$$

\* *Remarque* : Si l'écoulement est stationnaire dans un repère « E » entraîné à la vitesse  $\mathbf{v}_E$ , on a

$$d_e\phi/d_et = \partial\phi/\partial t + \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{grad}(\phi) = 0 \text{ donc}$$

$\partial\phi/\partial t = - \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{V}$ . En notant  $\mathbf{V}_r$  la vitesse de l'écoulement dans ce repère « E » on a :

$\mathbf{V} = \mathbf{v}_E + \mathbf{V}_r$  et  $\varepsilon = (\gamma - 1) \cdot (\partial\phi/\partial t + V^2/2)/c_0^2 = (\gamma - 1) \cdot (V_r^2 - V_e^2)/(2 \cdot c_0^2)$ .  $\varepsilon$  est donc de l'ordre de  $(\gamma - 1) \cdot M^2/2$  où  $M$  est un nombre de Mach caractéristique de l'écoulement. La restriction  $\varepsilon < 1$  n'est donc pas contraignante.

Pour qu'au second membre de l'équation (10) ne figurent que des termes non linéaires, il faut donc ajouter  $-(1/c_0^2) \cdot \partial^2\phi/\partial t^2$  de chaque côté du signe « = » et on obtient l'équation :

$$\Delta\phi - (1/c_0^2) \cdot \partial^2\phi/\partial t^2 = \text{div}\{(1 - \rho/\rho_0) \cdot \mathbf{grad}(\phi)\} - \partial(\rho/\rho_0)/\partial t - (1/c_0^2) \cdot \partial^2\phi/\partial t^2 = q$$

où ne subsistent que des termes non linéaires au second membre :  $q(x, y, z, t)$ .

On a ainsi fait apparaître naturellement le d'Alembertien de  $\phi$  caractéristique d'une propagation d'onde.

En posant :

$$b_c = 1 - \rho/\rho_0 - (1/c_0^2) \partial\phi/\partial t \quad (15)$$

et

$$\mathbf{b} = \{(1 - \rho/\rho_0) \cdot \mathbf{grad}(\phi)\} \quad (16)$$

qui sont des termes non linéaires clairement dus à la compressibilité, la conservation de la masse conduit à :

$$\Delta\phi - (1/c_0^2) \partial^2\phi/\partial t^2 = \partial b_c/\partial t + \text{div}(\mathbf{b}) = q \quad (17)$$

$q = \partial b_c/\partial t + \text{div}(\mathbf{b})$  terme non linéaire.

Souvenons nous que c'est l'équation de conservation de la masse qui nous a conduit à cette équation d'onde.

Le second membre qui contient des termes non linéaires en  $\mathbf{V}$  et  $\phi$  représente des sources réparties dans l'écoulement. En incompressible ( $\rho = \rho_0$ ,  $c_0 \rightarrow \infty$ ) ces sources disparaissent. Pour un écoulement compressible où les vitesses sont faibles (c'est le cas de l'acoustique), on peut négliger ces termes non linéaires et l'équation qui gouverne l'écoulement est :

$$\Delta\phi - (1/c_0^2) \partial^2\phi/\partial t^2 = \square\phi = 0$$

en notant  $\square$  l'opérateur d'Alembertien caractéristique d'une propagation d'onde à la célérité  $c_0$ .

Si les effets de compressibilité sont faibles, on peut espérer résoudre l'équation (17) en procédant par approximation successive : en notant  $\phi_0$  la solution de l'équation avec  $q = 0$ , on exprime  $q$  en fonction de cette solution approchée soit  $q_0$  puis on cherche la solution  $\phi_1$  de  $\square\phi_1 = q_0$  puis on exprime  $q_1$  en fonction de  $\phi_1$  et on recherche  $\phi_2$  solution de  $\square\phi_2 = q_1$  et ainsi de suite. On admettra avoir une solution « convergée » de  $\square\phi = q$  quand deux solutions  $\phi_{K-1}$  et  $\phi_K$  sont suffisamment voisine.

*\*Remarque :*

*Pour illustrer cette méthode dans un cas simple, cherchons la solution voisine de 1 de l'équation  $\alpha x^2 + x - 1 = 0$ .*

*La solution exacte est  $x = \{1 + (1+4\alpha)^{1/2}\}/(2\alpha)$ .*

*Si  $\alpha \leq 1$  le développement en série de puissance donne :  $x = 1 - \alpha + 2\alpha^2 - 5\alpha^3 + O(\alpha^4)$ .*

*En adoptant la méthode itérative ci-dessus on doit résoudre  $x - 1 = -\alpha x^2$ , ( $\alpha x^2 =$  terme non linéaire)*

*ou encore  $x = 1 - \alpha x^2$ .*

*On obtient :*

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 - \alpha$$

$$x_2 = 1 - \alpha(1 - \alpha)^2 = 1 - \alpha + 2\alpha^2 - \alpha^3$$

$$x_3 = 1 - \alpha(1 - \alpha + 2\alpha^2 - \alpha^3)^2 = 1 - \alpha + 2\alpha^2 - 5\alpha^3 + O(\alpha^4).$$

*On constate qu'à la troisième itération on a la solution exacte à l'ordre  $(\alpha^4)$ .*

*On pourra voir le piètre résultat obtenu en procédant ainsi mais en laissant des termes linéaires à droite du signe « = » en ajoutant  $x$  de chaque côté et en résolvant par itération  $2x - 1 = x + \alpha x^2$*

## **2. L'onde sonore**

Si la vitesse, la variation de la masse volumique  $\rho$  autour  $\rho_0$  et la variation de la pression  $p$  autour  $p_0$  sont petites, alors le potentiel vérifie l'équation :

$$\Delta\varphi - (1/c_0^2)(\partial^2\varphi/\partial t^2) = 0 \quad (18)$$

C'est l'équation des ondes acoustiques dans un milieu homogène et isotrope « au repos ».

Si on se limite à un mouvement unidimensionnel dans la direction  $x$ , on a :

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 - (\partial^2\varphi/\partial t^2)/c_0^2 = 0$$

Cette équation appelée équation des ondes homogène à une dimension a pour solution toute fonction de  $x$  et de  $t$  de la forme  $\varphi = f_1(x-c_0.t)$  ou  $\varphi = f_2(x+c_0.t)$  (ou une combinaison de ces fonctions) qui décrit un phénomène se propageant à la vitesse  $c_0$  vers la droite ( $x$  croissant) ou la gauche ( $x$  décroissant) quand le temps «  $t$  » s'écoule.

Ce sont les conditions initiales (à  $t = 0$  sur des surfaces dépendant de  $x, y, z$ ) et aux limites (sur des surfaces  $x, y, z, t$ ) non abordées explicitement ici qui permettent de préciser la forme exacte de  $\varphi(x, y, z, t)$ .

Il faut cependant vérifier que les hypothèses de « petite perturbations » sont satisfaites.

Ce ne sera pas le cas si les conditions initiales ou aux limites imposent une brutale variation temporelle (ou spatiale) de la vitesse (même de faible amplitude). Par exemple si la dérivée temporelle de  $\mathbf{V}$  et donc la dérivée temporelle  $\partial\varphi/\partial t$  est grande, cela entraîne une fluctuation importante de  $p = \rho_0.\partial\varphi/\partial t$ .

Dans un tel cas on ne peut pas « linéariser » les équations et il faut utiliser les équations d'Euler complètes et avoir recours à un traitement plus « précis » des équations d'Euler permettant d'exprimer la présence éventuelle de discontinuités dans l'écoulement (théorie des distributions). C'est l'objet du § 5.

### 3. Écoulement unidimensionnel compressible stationnaire : détente isentropique dans une tuyère

Examinons un cas encore simple : un écoulement de fluide parfait (non visqueux) dans une conduite à section rectangulaire de largeur constante  $L$  limitée par des parois situées en  $y = H(x)$  et  $y = -H(x)$ ,  $H(x)$  étant lentement variable. La section de la conduite  $S(x) = 2.L.H(x)$  est elle aussi lentement variable avec  $x$ .

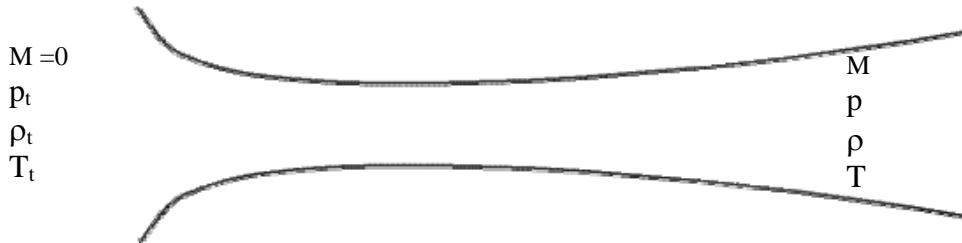


Figure 1 : tuyère supersonique.

On impose vitesse, pression et température ne dépendant pas du temps à l'entrée (conditions aux limites « amont »).

On suppose l'écoulement monodimensionnel (les grandeurs aérodynamiques ne dépendent que de la variable axiale  $x$ ) et stationnaire (indépendant du temps). Les équations du problème sont les équations (8) (9) et l'équation (13) avec  $\partial\phi/\partial t = 0$  donne :

$$V^2/2 + c^2/(\gamma - 1) = c_0^2/(\gamma - 1) \quad (19)$$

$$\text{avec } V^2 = (u^2 + v^2) = |\mathbf{V}|^2$$

où  $c_0$  est la célérité du son dans le gaz au repos ( $\mathbf{V}$  et  $M$  sont nuls) à la température  $T_0$  (température du gaz à l'arrêt).

En divisant par  $c_0^2$  et en introduisant le nombre de Mach  $M = |\mathbf{V}|/c$  (8) et (9) donnent l'évolution des grandeurs aérodynamiques  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  en fonction du nombre de Mach local  $M(x)$  dans l'écoulement :

$$c^2/c_0^2 = T/T_0 = [1 + (\gamma-1).M^2/2]^{-1} \quad (20)$$

$$p/p_0 = [1 + (\gamma-1).M^2/2]^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (21)$$

$$\rho/\rho_0 = [1 + (\gamma-1).M^2/2]^{-1/(\gamma-1)} \quad (22)$$

Ces équations déterminent  $p$ ,  $\rho$  et  $T$  (ou  $c$ ) en un point  $x$  de la conduite si on connaît  $M = V/c$  et l'état du gaz à l'amont où  $V = 0$ . Ces valeurs  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$  et  $c_0$  sont nommées valeurs « totales » ou « génératrices » ou encore « d'arrêt » (« stagnation » en anglais) et sont notées en général avec l'indice « t » comme « total » :  $p_t$ ,  $\rho_t$ ,  $T_t$  et  $c_t$ .

C'est ce qui est fait dans la suite de ce paragraphe où on note avec l'indice « 0 » les valeurs dans la section d'entrée de la conduite de surface  $S_0$  où la vitesse est petite et où les grandeurs  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$  et  $c_0$  sont voisines des valeurs d'arrêt  $p_t$ ,  $\rho_t$ ,  $T_t$  et  $c_t$ .

Les valeurs  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  dans (20) à (21) sont parfois nommées « statiques » (« static » en anglais à ne pas confondre avec « stagnation »).

La pression « dynamique » est la différence entre pression « totale » et « statique ».

La variation de la vitesse  $u(x)$  est donnée par la forme intégrale de l'équation de conservation de la masse (4') (qui n'a pas encore été utilisée) appliquée aux sections  $S(x)$  le long de la conduite (voir *remarque* en fin de paragraphe).

Puisqu'on suppose l'écoulement stationnaire (indépendant du temps,  $\partial\rho/\partial t = 0$ ) elle donne :

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho.\mathbf{V}).dV = 0.$$

Il faut aussi utiliser les conditions aux limites à savoir l'évolution de la section  $S(x)$  de la conduite. L'écoulement est « glissant » sur la paroi et donc  $\mathbf{V}$  est parallèle à la paroi en tout point. Il faut remarquer que la composante verticale  $v$  de  $\mathbf{V}$  n'est pas nulle.

En intégrant sur tout le volume  $V$  limité par la surface fermée constituée de la section d'entrée  $S_0$ , des bords de la conduite  $S_b$  entre  $x=0$  et  $x$  et de la surface de sortie  $S(x)$  on obtient en appliquant le théorème de Gauss :

$$0 = \iiint_V \operatorname{div}(\rho.\mathbf{V}).dV = \iint_{S_0+S_b+S} (\rho.\mathbf{V}.\mathbf{n}).dS$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal intérieur à la surface  $S$  en tout point de cette surface.

Sur la surface  $S_b$  de la conduite  $\mathbf{V}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{n}$  (glissement) donc  $\mathbf{V}.\mathbf{n} = 0$  sur  $S_b$ .

A l'entrée  $S_0$ ,  $\mathbf{V}_0(u_0, v_0, 0)$  (qui ne dépend que de  $x$  par hypothèse) est constant, et dans le même sens que  $\mathbf{n}$ , alors qu'à la sortie  $\mathbf{V}(u, v, 0)$  est en sens contraire de  $\mathbf{n}$ .

L'intégrale de surface donne donc  $\rho_0.u_0.S_0 - \rho.u.S = 0$  c'est à dire que le débit masse de fluide ( en kg/s) entrant à travers l'entrée  $S_0$  en  $x=0$  est égal au débit de fluide sortant à travers  $S$  en  $x$  :

$$\rho_0.u_0.S_0 = \rho.u.S. \quad (23)$$

C'est donc bien la condition aux limites  $u = u_0$  en  $S_0$  et l'évolution de la section de conduite  $S(x)$  en fonction de  $x$  qui déterminent l'écoulement par  $M(x) = u/c$  car on a admis que la composante  $v$  était beaucoup plus petite que  $u$ .

En effet, en introduisant les nombres de Mach  $M_0$  et  $M$ , (23) s'écrit :

$$M_0.\rho_0.c_0.S_0 = M.\rho.c.S$$

et avec (20) et (22) on trouve une expression liant  $M$  à  $S/S_0$  et  $M_0$ :

$$[1 + (\gamma-1).M^2/2]^{-(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}.M = M_0.(S_0/S) \quad (24)$$

En résumé (24) donne l'évolution de  $M(x)$  en fonction de  $S(x)/S(0)$  et avec (20), (21) et (22) on trouve l'évolution de  $c(x)/c(0)$  et celles de  $T(x)/T(0)$ ,  $V(x)/V(0)$ ,  $p(x)/p(0)$  et  $\rho(x)/\rho(0)$ . Malheureusement  $M$  ne s'exprime pas directement en fonction de  $S$ .

La figure 2 montre l'évolution de  $M(x)$  et de  $u(x)$  en fonction de  $S(x)$  pour de l'air ( $\gamma = 1.4$ ). On voit que c'est où la section  $S(x)$  est minimale que  $M = 1$ . C'est le « col » de la tuyère. On note (\*) les conditions correspondantes à  $M = 1$  nommées conditions critiques (voir figure 2). On a  $S^*/S_0 = 0.346$ ,  $c^*/c_0 = 0.913$ , etc.

L'écoulement est subsonique ( $M < 1$ ) et accélère quand la section de conduite diminue, puis devient supersonique et continue à accélérer quand la section augmente. C'est l'écoulement

dans une tuyère supersonique. Pour  $M = 2$  on doit avoir  $S/S_0 = 0.583$  (ou encore  $S/S^* = 1.685$ ) et  $p/p_0 = 0.127$ .

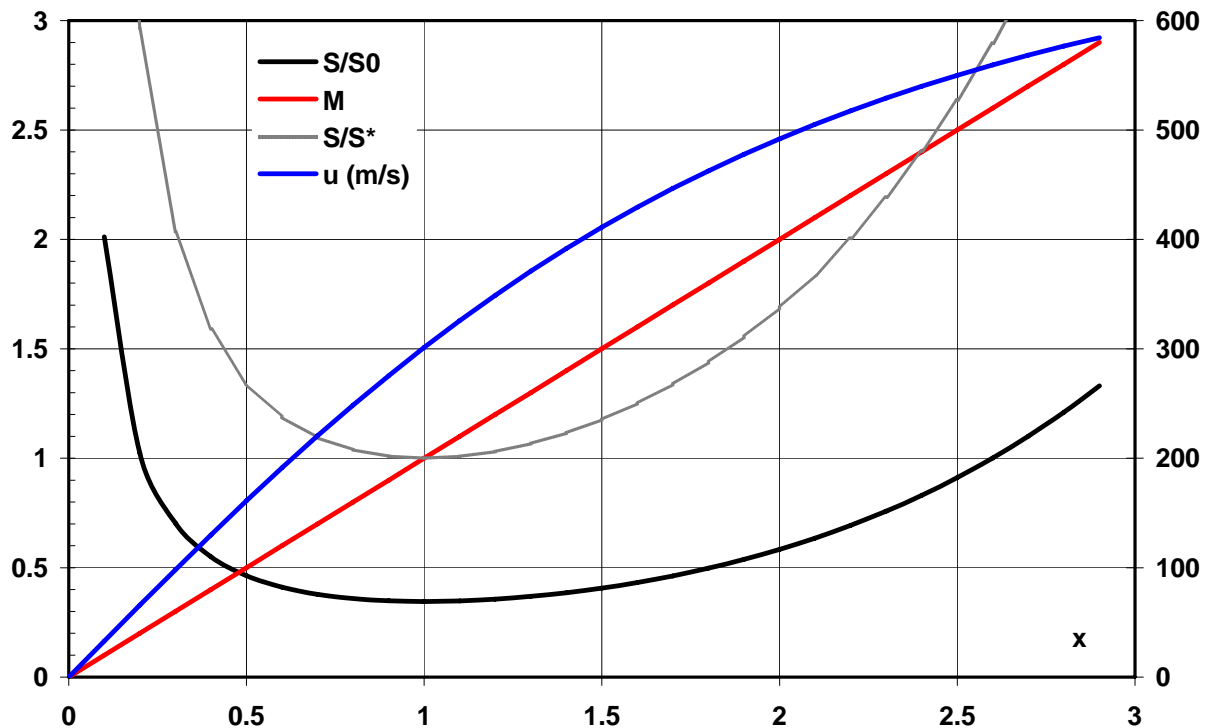


Figure 2 : écoulement dans une tuyère amorcée. Surface  $S(x)/S_0$  et  $S(x)/S^*$  de la section d'une tuyère, nombre de Mach  $M(x)$  et vitesse  $u(x)$  (échelle de droite) (air  $\gamma = 1.4$ ,  $c_0 = 330$  m/s).

Sur la figure 3 on montre l'évolution de  $T/T_t$ ,  $p/p_t$  et  $\rho/\rho_t$  en fonction de  $M$  donnés par (20), (21) et (22).  $T_t$ ,  $p_t$  et  $\rho_t$  sont valeurs « totales » ou « génératrices »

On voit que la densité et la température de l'air diminuent très vite quand  $M$  croît.

C'est pourquoi on doit augmenter  $p_t$  et  $T_t$  (pression et température « génératrice ») pour simuler dans une soufflerie supersonique les conditions de vol d'un objet supersonique dans l'atmosphère terrestre.

Par exemple pour avoir une pression  $p$  de 1 atmosphère et une température  $T$  de  $27^\circ\text{C}$  ( $T = 300\text{K}$ ) à  $M = 2.5$  il faut alimenter la tuyère avec de l'air à une pression de  $p_t = 10$  atmosphère à  $T_t = 600^\circ\text{K}$  soit  $327^\circ\text{C}$ .

Pour que cet écoulement s'établisse (on dit que la tuyère supersonique est amorcée), il faut que dans la section de sortie en  $x = x_1$ , où  $S = S_1$  et  $M = M_1$  donné par (24), les conditions de pression, de température et de masse volumique soient conformes à (20), (21), et (22).

En fait l'aire  $S_1$  de la section de sortie détermine le nombre de Mach  $M$  en sortie et il suffit que la condition de pression soit satisfaite pour que l'écoulement supersonique s'établisse.

On voit que ce sont bien les conditions sur toutes les « limites » du domaine de l'écoulement (à l'amont, au bord et à l'aval) qui déterminent celui-ci.

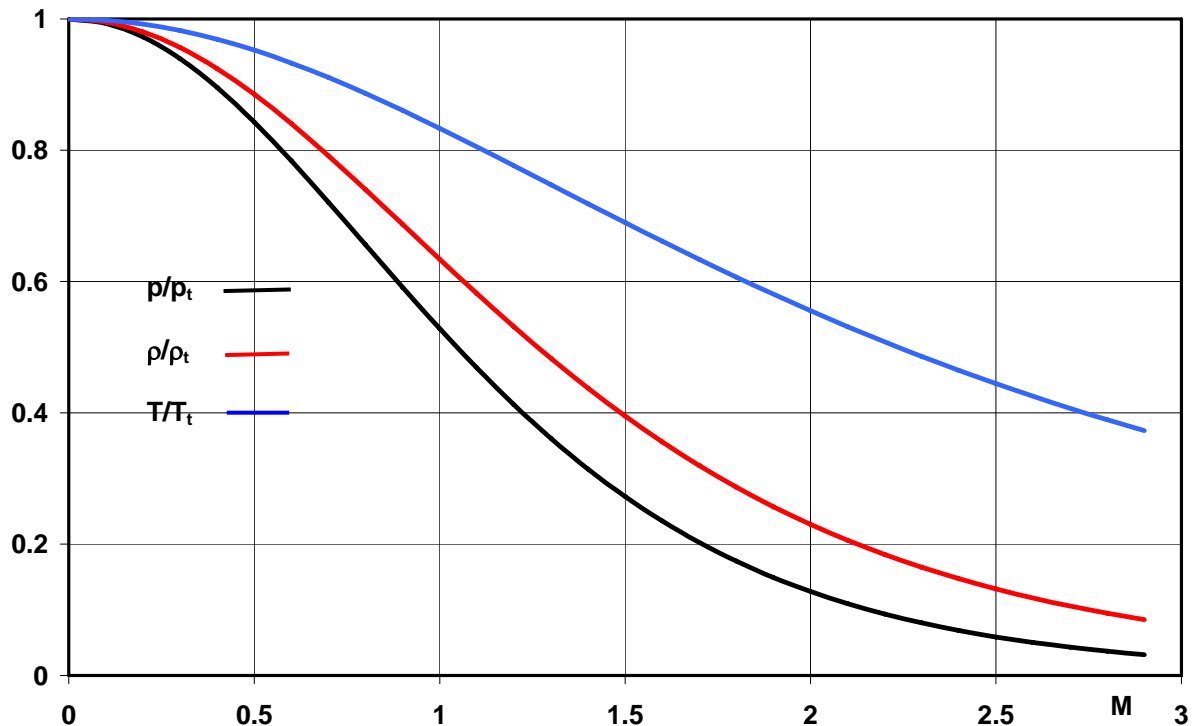


Figure 3 : Détente isentropique : évolution de  $p/p_t$ ,  $\rho/\rho_t$  et  $T/T_t$  en fonction de  $M$ .

*\*Remarques :*

*On serait tenté de considérer comme strictement nulle la composante verticale  $v$  du vecteur  $\mathbf{V}$ . Ce serait une grave erreur car on ne pourrait pas satisfaire la condition de glissement de l'écoulement à la paroi de la conduite que pour un tuyau à section  $S$  constante qui n'a aucun intérêt !*

*L'utilisation de la forme intégrale de l'équation de conservation de la masse permet de ne pas « détailler » les composantes  $u$  et  $v$  qui varient en fonction de  $y$  dans une section de la conduite.*

*Si  $u$  et  $\rho$  ne dépendaient strictement que de  $x$ , l'équation (4)  $\text{div}(\rho \cdot \mathbf{V}) = 0$  donnerait  $\partial(\rho u)/\partial x = 0$  soit  $\rho u = \text{constante} = \rho_0 u_0$  ce qui est faux car c'est (19) qui est juste !*

*En admettant une variation axiale et verticale de  $u$ ,  $v$  et  $\rho$ , l'équation (4) s'écrit (pour un écoulement stationnaire) :*

*$\partial(\rho \cdot u)/\partial x + \partial(\rho \cdot v)/\partial y = 0$  et avec (23) qui donne l'évolution de  $\rho \cdot u$  en fonction de  $S(x)$  on a :*

$$\partial(\rho \cdot v)/\partial y = \rho_0 \cdot u_0 \cdot (S_0/S^2) \cdot dS/dx = \rho_0 \cdot u_0 \cdot (H_0/H^2) \cdot dH/dx$$

*qui montre que les gradient selon  $y$  sont d'autant plus petits que  $dH/dx$  est petit.*

*Sur l'axe, en  $y = 0$ , on a  $v(x, y) = 0$  par symétrie. En  $y = \pm H$  le vecteur  $\mathbf{V}$  est tangent à la paroi.*

*En  $y = H$  le vecteur  $\mathbf{V}$  étant tangent à la paroi on a donc  $v/u = d(H(x))/dx$  et  $v(x, H) = u(x, H) \cdot dH/dx$ .*

*La composante verticale  $v$  est donc d'autant plus petite que  $dH/dx$  est petit d'où l'hypothèse d'une paroi à  $y = H(x)$  « lentement variable » avec  $x$ .*

*On peut estimer la valeur « moyenne » du gradient transversal de  $v$  à l'abscisse  $x$ :*

$$(\Delta v/\Delta y)_{\text{moy}} = [v(H) - v(0)]/H = [u(x, H)/H] \cdot dH/dx = u(x, H) \cdot d[\text{Ln}(S/S_0)]/dx$$

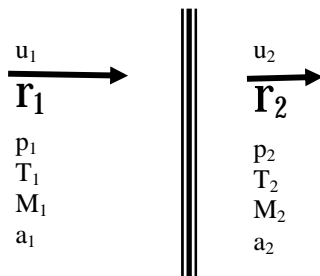
## 4. Re-compression. Choc droit. Choc oblique. Ondes de Mach

### 4.1 Choc droit

Que se passe-t-il si on place un obstacle dans la tuyère ?

Dans la partie supersonique de l'écoulement, les particules fluides qui vont rencontrer l'obstacle ne peuvent « avertir » celles qui arrivent derrière car le signal qu'elles pourraient envoyer vers l'amont se propage à la vitesse du son et donc à une vitesse inférieure à la vitesse des particules (comme dans les carambolages en série sur autoroute ou la vitesse de propagation du ralentissement est plus grande que la vitesse de propagation de l'information « bouchon » chez les conducteurs).

Ce « signal » n'est donc perceptible qu'à l'aval. Il y aura donc dans une petite région de l'écoulement un phénomène « cataclysmique » (comme aurait dit Salvador Dali) où les effets de la viscosité ne pourront être négligés : le choc.



On peut cependant faire des bilans entre l'amont et l'aval du choc en considérant qu'on a affaire à une discontinuité plane perpendiculaire à Ox et que la seule variable d'espace est x.

Le choc situé en  $x=0$ , considérons un écoulement supersonique uniforme horizontal ( $v = 0$ ) à l'amont ( $x < 0$ ) défini par  $u_1, \rho_1, p_1, T_1, c_1, M_1 = u_1/c_1$  ( $M_1 > 1$ ).

Pour  $x > 0$  on a  $u_2, \rho_2, p_2, T_2, c_2$ .

L'équation (3) donne :  $\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2$  (25)

L'équation (4) donne :  $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$  (26)

Des considérations de thermodynamique (Cf. « Gas Dynamics » de E. Becker Academic Press 1968 page 120-124) montrent que l'écoulement doit être supersonique à l'amont ( $u_1 > c_1$ ), et subsonique à l'aval du choc ( $u_2 < c_2$ ) et qu'il y a obligatoirement compression ( $p_2 > p_1$ ). Au lieu de la relation (5) liant  $p$  à  $\rho$  pour une transformation isentropique, on a pour un choc la relation de Hugoniot :

$$p_2/p_1 = [(\rho_2/\rho_1)(\gamma+1) - (\gamma-1)] / [(\gamma+1) - (\rho_2/\rho_1)(\gamma-1)]$$
 (27)

L'équation des gaz parfait donne :

$$p_1/p_2 = \rho_1 T_1 / (\rho_2 T_2)$$
 (28)

Il faut remarquer ici que pour des chocs faibles (faible discontinuité  $\Delta p = p_2 - p_1$  à travers le choc) l'équation (27) donne la même relation entre le saut de pression et le saut de masse volumique que l'équation (isentropique) (13).

En posant  $p_2 = p_1 + \Delta p$  et  $\rho_2 = \rho_1 + \Delta \rho$ , (27) conduit à

$$\Delta p/p_1 = \gamma \Delta \rho / \rho_1 + (\gamma^2 - 1) (\Delta \rho / 2 \rho_1)^2 + \dots$$

alors que (5) donne  $\Delta p/p_1 = \gamma \Delta \rho / \rho_1$ . Si  $\Delta \rho / \rho_1 \ll 1$  le résultat est le même.

**Même avec la présence de chocs faibles on pourra faire l'hypothèse d'isentropie pour des écoulements de gaz parfait.**

L'équation (27) montre que si  $p_1 \rightarrow 0$ , alors  $\rho_2/\rho_1 \rightarrow (\gamma+1)/(\gamma-1)$  (valeur maximale).

Le paramètre le plus commode pour exprimer les changements à travers le choc est  $M_1 = u_1/c_1$  (nombre de Mach à l'amont du choc).

Les équations (25), (26), (27) et (28) conduisent aux relations suivantes entre les valeurs  $( )_1$  à l'amont et  $( )_2$  à l'aval du choc :

$$\rho_2/\rho_1 = (\gamma+1).M_1^2/[2 + (\gamma-1).M_1^2] \quad (29)$$

$$p_2/p_1 = [2.\gamma.M_1^2 - (\gamma-1)]/(\gamma+1) \quad (30)$$

$$M_2^2 = [(\gamma+1) + (\gamma-1).(M_1^2 - 1)]/[(\gamma+1) + 2.\gamma.(M_1^2 - 1)] \quad (31)$$

$$T_2/T_1 = [2.\gamma.(M_1^2 - (\gamma-1))].[2 + (\gamma-1).M_1^2]/[(\gamma+1)^2 . M_1^2] \quad (32)$$

$$u_1 - u_2 = 2.c_1.(M_1 - 1/M_1)/(\gamma+1)$$

Il est intéressant d'exprimer les valeurs avant et après le choc en fonction des grandeurs « totale » (ou « d'arrêt » ou « réservoir » ou « stagnation ») notées  $( )_t$ .

Ces valeurs « totale » sont les valeurs  $p_0, \rho_0, T_0$  données par (20), (21) et (22) où on remplace les valeurs locales  $p, \rho, T, M$  (caractérisant l'écoulement après la détente qui l'a amené au Mach  $M$ ) par les valeurs à l'amont du choc  $p_1, \rho_1, T_1, M_1$ .

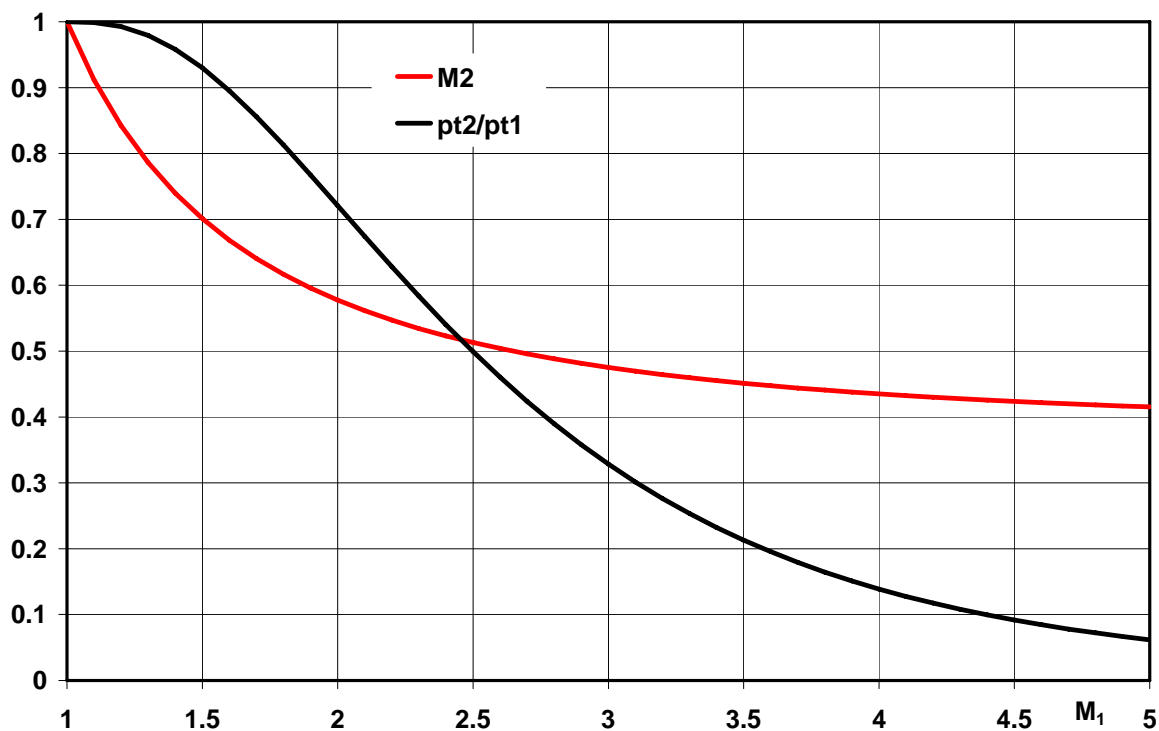


Figure 4 : Choc droit. Nombre de Mach  $M_2$  et rapport des pression totale  $p_2/p_{t1}$  à l'aval d'un choc droit en fonction du Mach amont  $M_1$ .

De l'équation (27) on déduit le saut d'entropie spécifique  $s_2 - s_1$  à travers le choc :

$$s_2 - s_1 = R.Ln(p_2/p_{t1})$$

$p_{t1}$  et  $p_{t2}$  étant la pression totale à l'amont et à l'aval du choc.

Rappelons que la pression totale «  $p_t$  » (aussi nommée pression d'arrêt...) est la pression qui serait mesurée en un point d'arrêt de l'écoulement  $M = 0$ .

$$p_{t2}/p_{t1} = \left\{ \frac{(\gamma+1).M_1^2}{2+(\gamma-1).M_1^2} \right\}^{\gamma/(\gamma-1)} \cdot \left\{ \frac{2.\gamma.M_1^2-(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \right\}^{-1/(\gamma-1)} \quad (33)$$

On définit aussi la température totale  $T_t$  qui est la température qui serait mesurée en un point d'arrêt de l'écoulement. A travers un choc droit la température d'arrêt ne change pas :

$$T_{t2} = T_{t1} \quad (34)$$

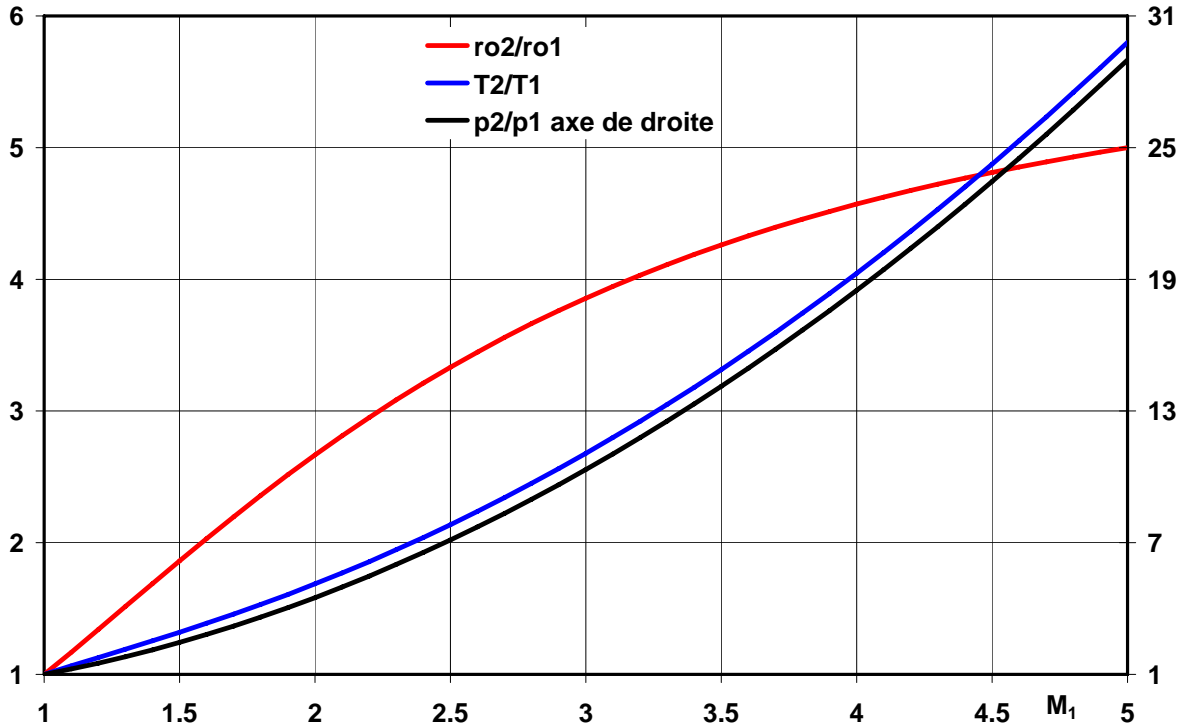


Figure 5 : Choc droit. Evolution de la masse volumique, de la température et de la pression à travers un choc droit en fonction du Mach amont.

Si un écoulement quasi unidimensionnel est accéléré par une tuyère à un nombre de Mach  $M = M_1$  et vient frapper un obstacle « émoussé », il y a une onde de choc « détachée » à l'amont du point d'arrêt schématisé figure 6. Le choc n'est pas une surface plane mais près de l'axe de symétrie on peut considérer qu'on a un choc droit perpendiculaire à la direction de l'écoulement supersonique amont. Les grandeurs juste à l'amont du choc et au voisinage de l'axe de symétrie sont données par (20), (21) et (22) ou  $( )_t$  sont les conditions d'arrêt dans le réservoir qui alimente l'écoulement. Les conditions juste à l'aval du choc  $( )_2$  sont données par les équations (29) à (34).

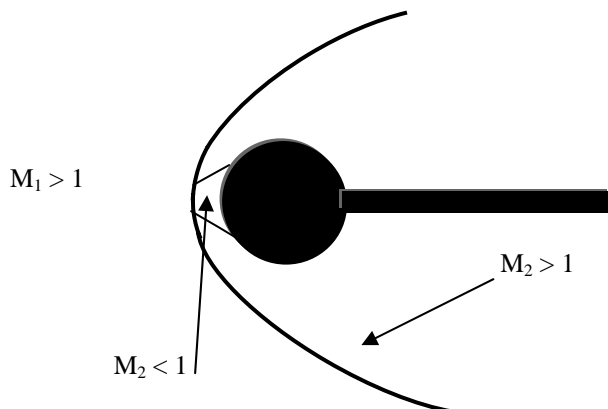


Figure 6 : schéma d'écoulement avec choc détaché à l'amont d'une sphère.

En dehors de cette région proche de l'axe il faut bien entendu, résoudre les équations d'Euler avec les conditions aux limites (glissement du fluide sur l'obstacle) pour connaître l'écoulement.

#### 4.2 Application : tuyère supersonique non amorcée.

Qu'est ce qui se passe si le système de pompage à l'aval d'une conduite profilée pour établir un écoulement à  $M = 2$  (tuyère convergente - divergente) ne permet plus d'assurer une pression suffisamment basse.

Supposons que l'entrée de la tuyère soit ouverte sur l'atmosphère,  $p_0 = 1$  bar (c'est aussi la pression totale  $p_t$ ).

Si la pression aval  $p$  est supérieure à 0.528 bar (correspondant à  $M = 1$  sur la figure 3) il n'y aura pas d'écoulement supersonique : l'écoulement accélère dans le convergent et ralenti dans le divergent.

Si cette pression  $p = 0.127$  bar (voir figure 3) il y aura amorçage de la tuyère avec un écoulement subsonique qui accélère dans le convergent à l'amont du col, sonique au col et qui continue à accélérer dans le divergent pour atteindre  $M = 2$ .

Si la pompe faiblit et que la pression aval remonte, il se produira un choc de recompression quelque part à une abscisse  $x_c$  dans le divergent puisque l'information « remontée de pression aval » ne sera pas transmise aux particules fluides supersoniques.

L'écoulement sera une détente adiabatique (supersonique) jusqu'à l'abscisse  $x_c$ , où la section est  $S_c$ , le Mach est  $M_c$  donnée par (24) et la pression totale  $p_t = 1$  bar (égale à  $p_0$ ).

A l'aval du choc, le nombre de Mach est  $M_2$  ( $M_2 < 1$ ) donné par (31) et la pression totale  $p_{t2}$  (qui diminue) est donnée par (35) avec  $M_1 = M_c$ .

L'écoulement de gaz est subsonique en aval du choc, il ralentit dans le divergent et sa pression remonte.

Pour fixer les idées, imaginons que le choc est à  $x_c = 1.5$  où la section de conduite est  $S_c = 0.406.S_0$  et  $M = M_1 = 1.5$  (figure 2).

La pression avant le choc est  $p_c = 0.272$  bar (figure 3), la pression d'arrêt est  $p_{t1} = 1$  bar (égale à la pression « réservoir » qui est l'atmosphère).

Le nombre de Mach  $M_2$  après le choc est donné par (31) et la pression d'arrêt après le choc  $p_{t2}$  est donnée par (33) : avec  $M_1 = 1.5$  on trouve (voir figure 4)  $M_2 = 0.7$  et  $p_{t2} = 0.5$  bar.

En aval du choc, dans le divergent, on a une détente adiabatique subsonique. Le gaz ralentit conformément aux équations (20), (21), (22) et (24), (24) donne l'évolution de  $M$  en fonction de la section  $S(x)$  de la conduite.

A la sortie, en  $x = 2.9$ ,  $S_s/S_0 = 1.33$  m2 (figure 2).

On connaît le rapport  $S_s/S_c = 1.33/0.406 = 3.27$  et le Mach  $M_2 = 0.7$  dans la section  $S_c$  après le choc. Avec (20) on peut déterminer le nombre de Mach  $M_s$  à la sortie :

$$[1 + (\gamma-1).M_s^2/2]^{-(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} .M_s.S_s = M_0.S_0 = [1 + (\gamma-1).M_2^2/2]^{-(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} .M_2.S_c$$

$M_s$  est solution de l'équation :

$$[1 + (\gamma-1).M_s^2/2]^{-(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} .M_s = [1 + (\gamma-1).M_2^2/2]^{-(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} .M_2.S_c/S_s$$

$$[1 + (\gamma-1).M_s^2/2]^{-(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} .M_s = 0.529.S_c/S_s = 0.162$$

Avec  $\gamma = 1.4$ ,  $M_s$  est solution de :  $[1 + 0.2M_s^2/2]^{-3} .M_s = 0.162$

On trouve  $M_s \approx 0.16$  et la pression de sortie est voisine de la pression totale  $p_{t2} = 0.9$  bar.

Cet écoulement qui s'établit dans la tuyère amorcée après une remontée de la pression aval à 0.9 bar est représenté sur la figure 7.

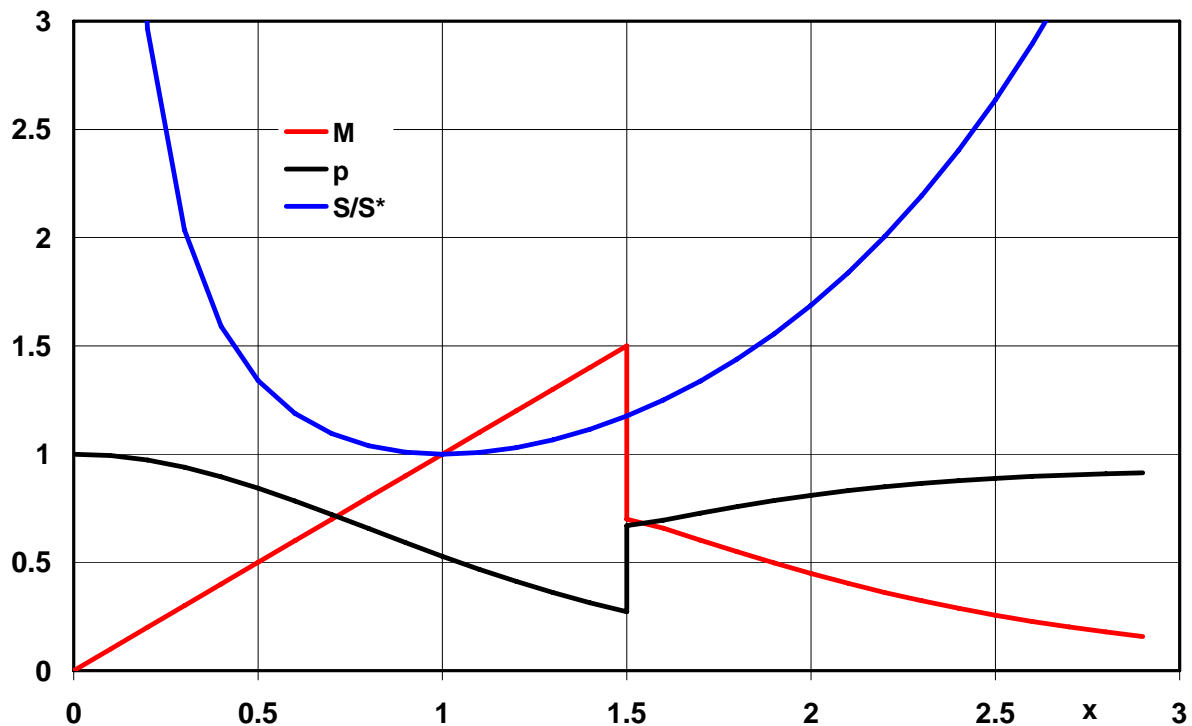


Figure 7 : écoulement dans une tuyère « convergent - divergent » avec choc de re-compression.

En pratique ?

On utilise la détente dans un convergent - divergent pour faire un écoulement supersonique et y placer des maquettes. La tuyère est profilée (tuyère de Laval) pour obtenir un écoulement uniforme à un nombre de Mach précis dans un certain volume.

Un écoulement avec choc de re-compression peut se produire dans une conduite d'air à haute pression s'il y a un rétrécissement qui se comporte comme un col. Il peut y avoir une perte de pression totale considérable.

#### 4.3 Choc oblique

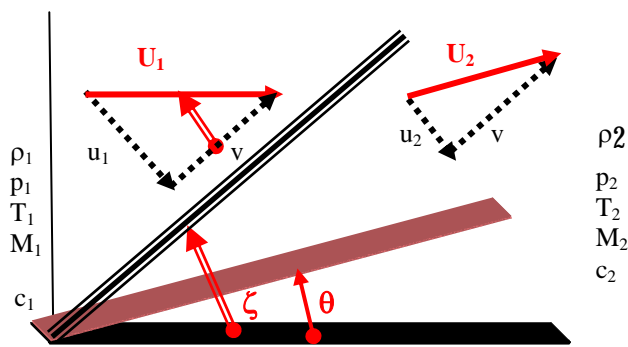
Un observateur mobile avec vitesse uniforme verticale « - v » verra l'écoulement de part et d'autre du choc droit augmenté d'une composante verticale v comme indiqué sur le schéma ci-contre où on a ramené la vitesse à l'amont du choc  $U_1$  parallèle à l'axe horizontal par une rotation de l'angle  $\pi/2 - \zeta$  où  $\zeta$  est défini par :

$$\tan(\zeta) = u_1/v.$$

A l'aval du choc la vitesse  $U_2$  est déviée d'un angle  $\theta$  tel que :

$$\tan(\zeta - \theta) = u_2/v$$

Ce type d'écoulement avec choc oblique se produit si par exemple un corps présentant un bord d'attaque pointu (un coin par exemple) est placé dans un écoulement supersonique et dévie l'écoulement de façon à ce que la vitesse soit parallèle à la surface du coin. Le choc est oblique et attaché à la pointe du corps.



Dans le nouveau repère en translation uniforme les relations (29) à (33) du choc droit sont valables mais dans ces relations  $M_1 = u_1/c_1$ . Il est plus pratique d'exprimer ces relations pour le choc oblique en introduisant le « vrai » Mach  $M_1 = U_1/a_1$ . Dans (29),(30) et (32) il faut donc remplacer  $M_1$  par  $M_1 \cdot \sin(\zeta)$ .

Figure 8 : choc oblique.  $U_2$  fait l'angle  $\theta$  avec  $U_1$   
 Le nombre de Mach à l'aval du choc oblique est déduit de sa valeur pour le choc droit en remplaçant  $M_2$  par  $M_2 \cdot \sin(\zeta - \theta)$  où  $M_2 = U_2/c_2$ .

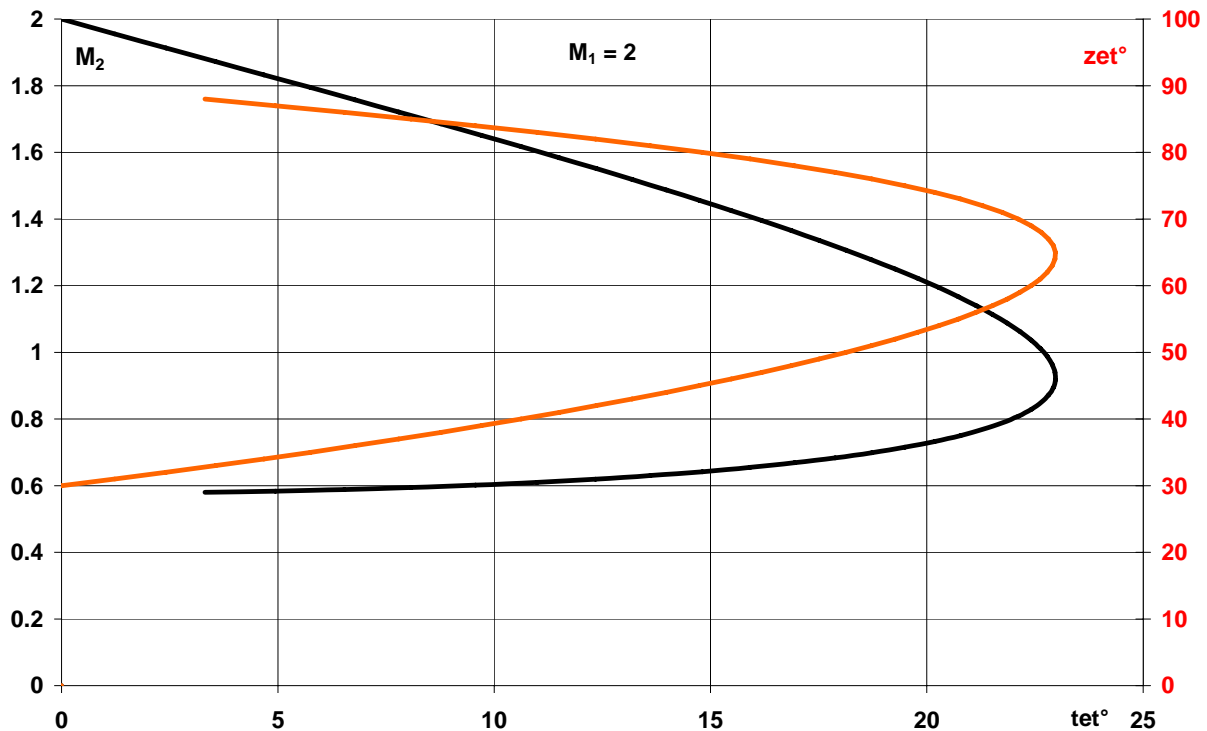


Figure 9 : choc oblique. Mach amont  $M_1 = 2$ . Mach aval  $M_2$  et angle du choc  $\zeta$  en fonction de la déviation  $\theta$  pour un gaz avec  $\gamma = 1.4$ .

(! le haut de la courbe noire correspond au bas de la courbe rouge).

La relation entre la déviation de l'écoulement  $\theta$  et l'angle du choc  $\zeta$  est :

$$\tan(\theta) = \tan\zeta \cdot \{M_1^2 \cdot \cos^2\zeta - \cotg^2\zeta\} / \{1 + 0.5 \cdot M_1^2 \cdot [\gamma + \cos(2\zeta)]\} \quad (35)$$

Une plaque plane très mince à incidence nulle dans un écoulement supersonique donnera un léger choc attaché faisant l'angle  $\zeta_0$  avec la plaque ( $30^\circ$  si  $M_1 = 2$  par exemple).

La relation entre le Mach amont  $M_1$  et le Mach aval  $M_2$  est :

$$M_2^2 \cdot \sin^2(\zeta - \theta) = \{\gamma + 1 + (\gamma - 1) \cdot (M_1^2 \cdot \sin^2\zeta - 1)\} / \{\gamma + 1 + 2\gamma \cdot (M_1^2 \cdot \sin^2\zeta - 1)\} \quad (36)$$

A la différence du choc droit, l'écoulement après le choc oblique peut être supersonique ou subsonique.

Sur la figure 9 on voit que si  $\theta = 15^\circ$ , on peut avoir un écoulement aval du choc soit avec  $M_2 = 1.45$  et  $\zeta = 46^\circ$  soit  $M_2 = 0.64$  et  $\zeta = 83^\circ$ . C'est le rapport de pression  $p_2/p_1$  qui va déterminer quel type d'écoulement a lieu.

Si  $\theta > \theta_{MAX}$  ( $23^\circ$  pour  $M_1 = 2$ ), il n'y a pas de choc oblique mais un choc droit devant l'obstacle. Pour  $\theta = \theta_{MAX}$  l'angle du choc est de  $65^\circ$ .  $M_2 > 1$  si  $\zeta < 65^\circ$ .

#### 4.4 Onde de Mach. Détente de Prandtl-Meyer.

Pour une déviation  $\delta\theta$  faible de l'écoulement, on a une faible différence de vitesse

$$\delta u_1 = u_2 - u_1.$$

Les équations (35) et (36) donnent :

$$\tan(\zeta) = u_1/v$$

$$\tan(\zeta - \delta\theta) = u_2/v = (u_1 + \delta u_1)/v = u_1/v + (\delta u_1/u_1).(u_1/v)$$

$\tan(\zeta - \delta\theta) = \tan\zeta.(1 + \delta u_1/u_1)$ . Pour  $\delta\theta \ll 1$  et en se limitant au premier ordre en  $\delta\theta$  c'est à dire en linéarisant les équations on a :

$$\delta u_1/u_1 = -\delta\theta.(\tan\zeta + 1/\tan\zeta)$$

$$\text{Or } V_1^2 = u_1^2 + v^2 \text{ d'où } V_1.\delta V_1 = u_1.\delta u_1 \text{ et } \delta u_1/u_1 = V_1^2/u_1^2.(\delta V_1/V_1).$$

Comme  $V_1/u_1 = 1/\sin(\zeta)$  alors

$\delta V_1/V_1 = -\delta\theta.\sin^2\zeta.(\tan\zeta + 1/\tan\zeta)$  et comme  $\delta\theta \ll 1$ , alors  $\zeta = \zeta_0$  (avec  $\sin\zeta_0 = 1/M_1$ ) et on obtient (en supprimant l'indice 1 inutile):

$$\delta V/V = -\delta\theta.(M^2 - 1)^{-1/2}.$$

Si  $\delta\theta < 0$ ,  $\delta V_1 > 0$ , l'écoulement accélère ( $M > 1$ ), la pression diminue et on a ainsi une détente isentropique (détente de Prandtl-Meyer) où les équations (19) à (22) s'appliquent (pas les équations du choc).

$$V^2/2 + c^2/(\gamma - 1) = c_0^2/(\gamma - 1) \quad (19)$$

$$c^2/c_0^2 = [1 + (\gamma - 1).M^2/2]^{-1} \quad (20)$$

(19) donne la vitesse maximale  $V_{max}$  atteinte si la température et la vitesse du son dans l'écoulement est nulle soit

$$V_{max} = [2/(\gamma - 1)]^{1/2}.c_0 \text{ et avec (20) on peut s'écrire}$$

$$V/V_{max} = M.[2/(\gamma - 1) + M^2]^{-1/2}$$

On en déduit

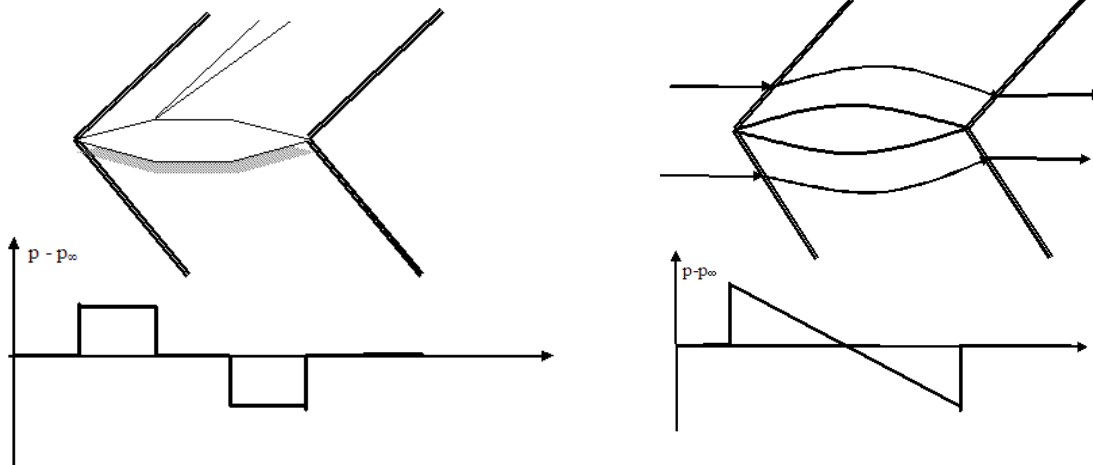
$$\delta V/V = [1 + (\gamma - 1).M^2/2]^{-1}.\delta M/M$$

De  $\delta V/V = -\delta\theta.(M^2 - 1)^{-1/2}$  on tire  $\delta\theta = -(M^2 - 1)^{1/2}.\delta V/V$  ou encore la relation entre  $\delta\theta$  et  $\delta M$  :

$$\delta\theta = -(M^2 - 1)^{1/2}.[1 + (\gamma - 1).M^2/2]^{-1}.\delta M/M$$

La relation  $\theta(M)$  est la relation de Prandtl-Meyer. Elle donne le nombre de Mach sur une paroi convexe, l'angle de l'onde de Mach avec la paroi « locale » étant  $\zeta = \arcsin(1/M)$ .

Les figures ci-dessous schématisent des écoulements (partout supersonique) autour de corps simples 2D « pointus » ou se combinent des chocs obliques (attachés au bord d'attaque et au bord de fuite) et des détente de Prandtl-Meyer et montrent l'allure de la variation de pression sur ces corps.



En pratique ?

Dans le deuxième cas, l'évolution de la pression explique le « double bang » ressenti quand un tel corps passe à une vitesse supersonique au dessus d'un observateur. Il s'agit des recompressions rapides au bord d'attaque et au bord de fuite qui sont séparées d'un intervalle de temps  $\delta t$  égal à  $L/U$ ,  $L$  et  $U$  étant respectivement la longueur et la vitesse du corps.

On a vu dans ce paragraphe l'organisation d'écoulements supersoniques avec des chocs droits, obliques, des ondes de détente mais pour un calcul exact de ce type d'écoulement il faut faire appel à des méthodes qui nécessitent des calculs numériques.

### 5. Théorie générale des écoulements compressibles à potentiel de vitesse. « Panel Method »

Au paragraphe 1.4 on a montré que le potentiel compressible vérifie une équation d'onde avec des termes non linéaires «  $q$  » au second membre :

$$\Delta\varphi - (1/c_0^2)\partial^2\varphi/\partial t^2 = \partial b_c/\partial t + \text{div}(\mathbf{b}) = q \quad (17)$$

$$b_c = 1 - \rho/\rho_0 - (1/c_0^2)\partial\varphi/\partial t \quad (15)$$

$$\mathbf{b} = \{(1 - \rho/\rho_0) \cdot \text{grad}(\varphi)\}$$

En notant  $\square\varphi$  le d'Alembertien de  $\varphi$ , (17) s'écrit

$$\square\varphi = q \quad (37)$$

Pour un fluide incompressible, on a vu au chapitre 5 que les discontinuités de potentiel et de vitesse à travers des surfaces (ailes, corps, sillages) sont les « moteurs » de l'écoulement gouverné par l'équation de Laplace  $\Delta\varphi = 0$ .

Pour faire apparaître ces discontinuités dans les équations de l'écoulement potentiel d'un gaz compressible on va écrire les équations en tenant compte d'éventuelles discontinuités.

Rappelons qu'un écoulement à potentiel de vitesse est un écoulement ou  $\text{rot}(\mathbf{V}) = 0$  ce qui permet d'écrire :

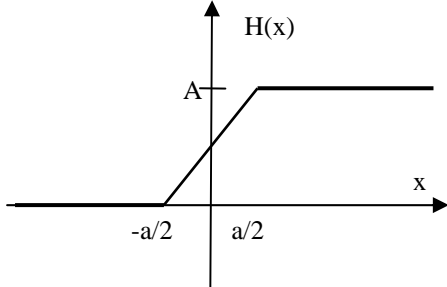
$$\mathbf{V} = \text{grad}(\varphi) \quad (38)$$

### 5.1 Dérivation au sens des distributions.

La théorie des distributions permet de traiter les fonctions qui présentent des discontinuités.

Soit par exemple la fonction  $H_a(a,x)$  définie par :

$H_a(a,x) = 0$  pour  $x < -a/2$  ;  $H_a(a,x) = A.(x + a/2)/a$  pour  $-a/2 < x < a/2$  ;  $H_a(a,x) = A$  pour  $x > a/2$ .



La dérivée  $\partial H_a / \partial x = 0$  pour  $x < -a/2$  et  $x > a/2$  et  $\partial H_a / \partial x = A/a$  pour  $-a/2 < x < a/2$ .

Si  $a \rightarrow 0$ ,  $H_a(0,x) = H(x)$  est un échelon (discontinuité de  $A$  à  $x=0$ ) et sa dérivée  $dH/dx$  est nulle sauf en  $x=0$  où elle tend vers l'infini. On introduit ainsi la distribution de Dirac  $\delta(x)$  « pseudo-fonction » nulle partout sauf en  $x=0$  et dont l'intégrale de  $-\infty$  à  $+\infty$  vaut 1 et on écrit :  $dH/dx = A.\delta(x)$ .

Plus généralement on peut représenter une discontinuité  $[A(x,y,z,t)]$  sur une surface  $f(x,y,z,t) = 0$  par la fonction  $H(f)$  dont la dérivée  $\underline{\partial H} / \partial x = \underline{dH} / df$ .  $\partial f / \partial x = [A(x,y,z,t)].\delta(f).$  et on a par exemple :  $\underline{\text{grad}}(H) = [A(x,y,z,t)].\delta(f).\underline{\text{grad}}(f)$ .

On note entre crochet [ ] la discontinuité.

On admet des discontinuités de potentiel  $[\varphi]$  et de vitesse  $[\mathbf{V}] = [\underline{\text{grad}}(\varphi)]$  à travers une (ou des) surface(s)  $S$  fermée(s) éventuellement en mouvement décrite par  $f(\mathbf{x}, t) = 0$  et telle que  $|\underline{\text{grad}}(f)| = 1$ .

Pour fixer les idées on admet que dans le volume intérieur à la surface  $S$  on a  $f(\mathbf{x}, t) < 0$  et  $f(\mathbf{x}, t) > 0$  dans le volume extérieur.

Le vecteur  $\mathbf{n} = \underline{\text{grad}}(f)$  est un vecteur normal unitaire à la surface  $S$  et pointe vers l'extérieur.

La dérivée temporelle  $df/dt = \partial f / \partial t + \mathbf{U} \cdot \underline{\text{grad}}(f)$ ,  $\mathbf{U}$  étant la vitesse locale de la surface  $S$ .

Comme  $f(x, y, z, t) = 0$  sur la surface  $f$ ,  $df/dt = 0$  et  $\partial f / \partial t + \mathbf{U} \cdot \underline{\text{grad}}(f) = 0$  d'où :

$$\partial f / \partial t = - \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = - U_n \quad (39)$$

Evaluons les dérivées au sens des distributions (notées soulignées  $\underline{\partial}$ ) de  $\varphi$  en tenant compte de discontinuités à travers la surface  $S$ , les dérivées « normales » de  $\varphi$  démunies de ses discontinuités sont notées  $\partial$ .

On peut écrire  $\underline{\varphi} = \varphi + [\varphi].H(f)$  où  $H(f) = 0$  pour  $f < 0$  (intérieur de  $S$ ) et  $H(f) = 1$  pour  $f > 0$  (extérieur de  $S$ ),  $\varphi$  étant le potentiel démunie de ses discontinuités,  $H$  est l'échelon de Heaviside.

$[\varphi] = \varphi_{\text{ext}} - \varphi_{\text{int}}$  est le saut de potentiel quand on passe de l'intérieur à l'extérieur de  $S$  c'est à dire dans le sens de  $\mathbf{n}$ .

Voyons les dérivées par rapport au temps.

$$\underline{\partial \varphi} / \partial t = \partial \{ \varphi + [\varphi].H(f) \} / \partial t = \partial \varphi / \partial t + [\varphi].\underline{dH} / df . \partial f / \partial t = \partial \varphi / \partial t + [\varphi].\partial f / \partial t . \delta(f) \text{ et avec (39) :}$$

$$\underline{\partial \varphi} / \partial t = \partial \varphi / \partial t - [\varphi].U_n . \delta(f) \quad (40)$$

$\delta(f)$  est la distribution de Dirac sur la surface  $S$ .

La dérivée seconde est :

$$\begin{aligned}\underline{\partial^2 \varphi / \partial t^2} &= \underline{\partial} \{ \partial \varphi / \partial t - [\varphi] \cdot \mathbf{U}_n \cdot \delta(f) \} / \underline{\partial} t = \underline{\partial} \{ \partial \varphi / \partial t \} / \underline{\partial} t - \underline{\partial} \{ [\varphi] \cdot \mathbf{U}_n \cdot \delta(f) \} / \underline{\partial} t \\ &= \partial^2 \varphi / \partial t^2 + [\partial \varphi / \partial t] \cdot \partial f / \partial t \cdot \delta(f) - \underline{\partial} \{ [\varphi] \cdot \mathbf{U}_n \cdot \delta(f) \} / \underline{\partial} t \\ \underline{\partial^2 \varphi / \partial t^2} &= \partial^2 \varphi / \partial t^2 - [\partial \varphi / \partial t] \cdot \mathbf{U}_n \cdot \delta(f) - \underline{\partial} \{ [\varphi] \cdot \mathbf{U}_n \cdot \delta(f) \} / \underline{\partial} t\end{aligned}\quad (41)$$

Pour les dérivées spatiales on a :

$$\underline{\mathbf{grad}}(\varphi) = \mathbf{grad} \varphi + [\varphi] \cdot \mathbf{grad}(f) \cdot \delta(f) \text{ ou}$$

$$\underline{\mathbf{grad}}(\varphi) = \mathbf{grad}(\varphi) + [\varphi] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) \quad (42)$$

$$\text{On a aussi : } \underline{\text{div}}\{\underline{\mathbf{V}}\} = \text{div}\{\mathbf{V}\} + [\mathbf{V}] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) \quad (42')$$

Le Laplacien de  $\varphi$  s'exprime par  $\underline{\text{div}}\{\underline{\mathbf{grad}}(\varphi)\} = \underline{\text{div}}\{\mathbf{grad}(\varphi)\} + \underline{\text{div}}\{[\varphi] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f)\}$ .  
Avec (42) le premier terme s'écrit

$$\underline{\text{div}}\{\underline{\mathbf{grad}}(\varphi)\} = \text{div}\{\mathbf{grad}(\varphi)\} + [\mathbf{grad}(\varphi)] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) = \Delta \varphi + [\mathbf{grad}(\varphi)] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) \text{ et on a :}$$

$$\underline{\text{div}}\{\underline{\mathbf{grad}}(\varphi)\} = \Delta \varphi + [\mathbf{grad}(\varphi)] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) + \underline{\text{div}}\{[\varphi] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f)\}$$

$\Delta \varphi$  est le Laplacien de  $\varphi$  démuné de ses discontinuités et  $\underline{\text{div}}\{\underline{\mathbf{grad}}(\varphi)\} = \underline{\Delta} \varphi$  :

$$\underline{\Delta} \varphi = \Delta \varphi + [\mathbf{grad}(\varphi)] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) + \underline{\text{div}}\{[\varphi] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f)\}$$

ou encore :

$$\underline{\Delta} \varphi = \Delta \varphi + [\mathbf{V}_n] \cdot \delta(f) + \underline{\text{div}}\{[\varphi] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f)\} \quad (43)$$

car  $[\mathbf{grad}(\varphi)] \cdot \mathbf{n}$  est la composante normale  $[\mathbf{V}_n]$  du saut de vitesse  $[\mathbf{V}]$  de l'écoulement de part et d'autre de la surface S et  $[\varphi]$  est le saut de potentiel à travers la surface S.

## 5.2 Retour sur le cas incompressible du chapitre 5.

En incompressible, la célérité du son  $c_0$  tend vers l'infini. Si  $c_0 \rightarrow \infty$  l'équation (17) devient  $\Delta \varphi = 0$ .

Au sens des distributions ceci s'écrit (voir (44)) :

$$\underline{\Delta} \varphi = [\mathbf{V}_n] \cdot \delta(f) + \underline{\text{div}}\{[\varphi] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f)\} \quad (44)$$

La solution de cette équation pour une source ponctuelle élémentaire

$$\underline{\Delta} \varphi = \delta(\mathbf{x}, t)$$

est la fonction de Green pour cette équation :

$$G(x, y, t) = -1/(4\pi \cdot r) \text{ où}$$

$$r = |\mathbf{r}| \text{ avec } \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \quad (45)$$

Le vecteur  $\mathbf{r}$  est orienté de la source (point P de la surface S,  $\mathbf{OP} = \mathbf{y}$ ) vers l'observateur (point M où on calcule le potentiel  $\varphi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{OM} = \mathbf{x}$ )  $\mathbf{r} = \mathbf{PM}$ .

La solution de l'équation  $\Delta\varphi = q(\mathbf{y}, t)$  (équation de Poisson) est l'intégrale dans tout l'espace du produit de  $q$  avec la fonction de Green de cette équation :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -1/4\pi \iiint_{V_\infty} q(\mathbf{y}, t)/|\mathbf{x} - \mathbf{y}| dy^3$$

où la position de l'observateur  $\mathbf{x}$  est fixée

En remplaçant «  $q$  » par le deuxième membre de (44) on a :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -1/4\pi \iiint_{V_\infty} \{ [\mathbf{grad}(\varphi)].\mathbf{n}.\delta(f) + \underline{\text{div}}\{[\varphi].\mathbf{n}.\delta(f)\} \}/r dy^3$$

où l'intégrale triple porte sur tout l'espace (volume infini).

$$\text{Sachant que } \iiint_{V_\infty} q(\mathbf{y}, t).\delta(f) dy^3 = \iint_S q(\mathbf{y}, t) dy^2$$

où l'intégrale de surface porte sur la surface  $S$  (définie par  $f = 0$ ) on a :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -1/4\pi \iint_S [\mathbf{grad}(\varphi)].\mathbf{n}/r dy^2 - 1/4\pi \iiint_{V_\infty} [\underline{\text{div}}\{[\varphi].\mathbf{n}.\delta(f)\}]/r dy^3 \quad (46)$$

$$\text{or } \underline{\text{div}}[\mathbf{F}(\mathbf{y})]/r = \underline{\text{div}}[\mathbf{F}(\mathbf{y})/r] - \mathbf{F}(\mathbf{y}).\mathbf{grad}(1/r)$$

L'intégrale de volume devient :

$$\iiint_{V_\infty} \underline{\text{div}}\{[\varphi].\mathbf{n}.\delta(f)\}/r dy^3 = \iiint_{V_\infty} \underline{\text{div}}\{[\varphi].\mathbf{n}.\delta(f)/r\} dy^3 - \iiint_{V_\infty} [\varphi].\mathbf{n}.\delta(f).\mathbf{grad}(1/r) dy^3$$

ou encore :

$$\iiint_{V_\infty} \underline{\text{div}}\{[\varphi].\mathbf{n}.\delta(f)\}/r dy^3 = \iiint_{V_\infty} \underline{\text{div}}\{[\varphi].\mathbf{n}.\delta(f)/r\} dy^3 - \iint_S [\varphi].\mathbf{n}.\mathbf{grad}(1/r) dy^2$$

L'intégrale de volume porte sur tout l'espace comme celui enfermé dans une sphère  $S_\infty$  centrée à l'origine et de rayon infini.

En appliquant le théorème de Gauss (ou de la divergence) on trouve que l'intégrale de volume est nulle. En effet on a :  $\iiint_{V_\infty} \underline{\text{div}}\{[\varphi].\mathbf{n}.\delta(f)/r\} dy^3 = \iint_{S_\infty} \{[\varphi].\mathbf{n}/r\}.\delta(f).\mathbf{n}_\infty dy^2 = 0$

$\mathbf{n}$  est la normale à la surface  $S$  et  $\mathbf{n}_\infty$  la normale à la surface  $S_\infty$ .

$$\text{or } \iint_{S_\infty} [\varphi].\mathbf{n}/r.\delta(f).\mathbf{n}_\infty dy^2 = \int_\Gamma [\varphi].\mathbf{n}.\mathbf{n}_\infty/r d\Gamma, \Gamma \text{ étant la ligne intersection de la surface } S$$

avec  $S_\infty$ . Si le potentiel est nul à l'infini, ou si la surface  $S$  ne s'étend pas jusqu'à infini cette intégrale est nulle.

On obtient finalement :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -1/4\pi \iint_S [\mathbf{grad}(\varphi)].\mathbf{n}/r dy^2 + 1/4\pi \iint_S [\varphi].\mathbf{n}.\mathbf{grad}(1/r) dy^2 \quad (47)$$

où  $\mathbf{grad}(1/r)$  se calcule avec  $\mathbf{x}$  fixé (on note  $\mathbf{grad}_y$  pour indiquer que c'est  $y$  qui varie) :

$$\mathbf{grad}_y(1/r) = (-1/r^2).\mathbf{grad}_y(r) \text{ et } \mathbf{grad}_y(r) = -\mathbf{r}/r$$

$$\mathbf{grad}_y(1/r) = \mathbf{r}/r^3 \quad (48)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{grad}(\varphi)] = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{V}] = [V_n] \quad (49)$$

est la discontinuité de la composante normale à la surface S de la vitesse en  $\mathbf{y}$ .

Et finalement on a  $\varphi(\mathbf{x})$  qui s'exprime en fonction des discontinuité  $[\varphi]$  du potentiel et de la discontinuité  $[V_n]$  de la vitesse normale à S.

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -1/4\pi \iint_S [V_n] \cdot \mathbf{r} / r^3 dy^2 + 1/4\pi \iint_S [\varphi] \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} / r^3 dy^2$$

On trouve la même expression qu'au chapitre 5 où on avait utilisé la formule de Green.

Il faut noter que les discontinuités sont « mesurées » dans la direction du vecteur  $\mathbf{n}$ . On a choisi « a priori » une normale  $\mathbf{n}$  orientée vers l'extérieur de la surface S ( $f < 0$  à l'intérieur de S et  $f > 0$  à l'extérieur de S), les discontinuités sont donc  $[\varphi] = \varphi_{\text{ext}} - \varphi_{\text{int}}$  et  $[V_n] = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{V}] = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V}_{\text{ext}} - \mathbf{V}_{\text{int}})$ .

Si on choisit une normale  $\mathbf{n}'$  orientée vers l'intérieur rien ne change (heureusement !) En effet le « nouveau » vecteur  $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ , les « nouvelles » discontinuités changent de signe

$[ ]' = - [ ]$  et donc  $\mathbf{n} \cdot [\mathbf{V}]$  et  $[\varphi] \cdot \mathbf{n}$  ne changent pas.

On a pris au chapitre 5 une normale  $\mathbf{n}$  orientée vers l'intérieur de la surface S. La figure 8 (c'est la figure 1 du chapitre 5) montre une surface S composée d'un profil d'aile  $S_A$ , de surfaces  $S_w$  (sillage) qui se raccordent à une sphère  $S_\infty$  à très grande distance.

Les discontinuités sont donc

$$[ ( ) ] = ( )_{\text{int}} - ( )_{\text{ext}}$$

On fixe le potentiel à 0 (et donc la vitesse) à l'extérieur de la surface S (dans le profil d'aile) et à l'infini. L'écoulement qui nous intéresse (au point M) est à l'intérieur de S.

Dans ces conditions les discontinuités sont  $[ ( ) ] = ( )_{\text{int}}$  c'est à dire la valeur de ( ) sur la surface, coté écoulement.

On peut donc écrire  $[\varphi] = \varphi(\mathbf{y})$  et  $[\mathbf{V}] = \mathbf{V}(\mathbf{y})$  valeurs de  $\varphi$  et  $\mathbf{V}$  sur la surface S coté écoulement,  $\mathbf{n}$  étant la normale vers l'intérieur de S et on obtient le résultat du chapitre 5 :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -1/4\pi \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{r} / r^3 dy^2 + 1/4\pi \iint_S \varphi \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} / r^3 dy^2 \quad (50)$$

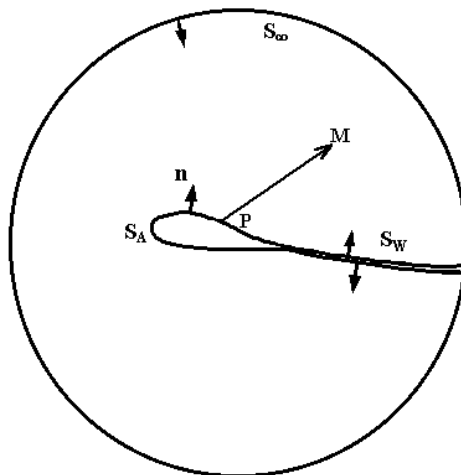


Figure 8 : Schéma de la surface d'intégration S.

On peut noter qu'il n'est pas obligatoire d'avoir des discontinuités sur toute la surface  $S$  et qu'elle peut être composée de panneaux élémentaires  $S_i$ .

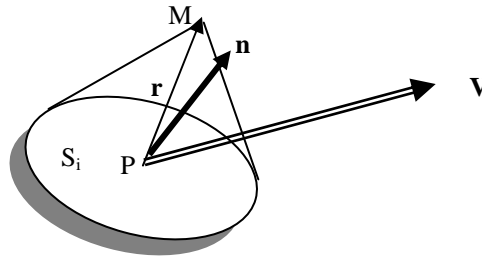


Figure 9 : Élément de surface  $S_i$ .

On peut montrer que  $\iint_{S_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} / r^3 \cdot dy^2$  est l'angle solide  $\Omega$  sous lequel on voit la surface  $S_i$

depuis le point  $M$ , compté positivement si  $M$  est du côté de  $\mathbf{n}$ , et négativement si  $M$  est du côté opposé à  $\mathbf{n}$ .

En conséquence  $\iint_{S_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} / r^3 \cdot dy^2 \rightarrow 2\pi$  quand  $M \rightarrow S_i$  du côté de l'écoulement. On peut aussi

montrer que  $\iint_{S_i} dy^2 / r$  est borné quand  $M \rightarrow S_i$ .

### 5.3 Présence de surface de discontinuité. Conditions aux limites pour le cas compressible.

Pour prendre en compte les discontinuités du potentiel  $\varphi$ , de ses dérivées spatiales (**grad**( $\varphi$ )) et temporelles ( $\partial\varphi/\partial t$ ) sur des surfaces, il faut écrire le d'Alembertien « au sens des distributions ». En utilisant (41) et (43) :

$$\partial^2 \varphi / \partial t^2 = \partial^2 \varphi / \partial t^2 - [\partial\varphi/\partial t] \cdot U_n \cdot \delta(f) - \partial/\partial t \{ [\varphi] \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \quad (41)$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi + [\mathbf{grad}(\varphi)] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) + \text{div} \{ [\varphi] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) \} \quad (43)$$

L'équation (17) s'écrit :

$$\square \varphi = [V_n] \cdot \delta(f) + \text{div} \{ [\varphi] \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) \} + (1/c_0^2) \{ [\partial\varphi/\partial t] \cdot U_n \cdot \delta(f) + \partial/\partial t \{ [\varphi] \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \} + q \quad (51)$$

où  $U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{U}$  étant la vitesse de la surface  $S$ . Toutes ces expressions sont pour le repère absolu où  $\varphi$  et  $\mathbf{V} = \mathbf{grad}(\varphi)$  sont nuls à l'infini.

Si  $\mathbf{n}$  est la normale intérieure à la surface  $S$  on a  $[(\ )] = (\ )_{\text{int}} - (\ )_{\text{ext}}$ .

En imposant  $(\ ) = 0$  à l'extérieur de  $S$ , alors  $[(\ )] = (\ )_{\text{int}}$  c'est à dire la valeur de  $(\ )$  coté écoulement sur la surface  $S$  (comme en incompressible) et on peut écrire  $[(\ )] = (\ )$  ou encore  $[V_n] = V_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}(\varphi)$  et  $[\varphi] = \varphi$ ,  $V_n$  et  $\varphi$  étant les valeurs sur la surface  $S$  coté écoulement. Ceci simplifie l'écriture de (51) qui devient :

$$\square \varphi = V_n \cdot \delta(f) + \text{div} \{ \varphi \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f) \} + (1/c_0^2) \cdot \{ \partial\varphi/\partial t \cdot U_n \cdot \delta(f) + \partial/\partial t \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \} + q \quad (52)$$

Rappelons que dans (52)  $\varphi$  est le potentiel et  $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  est la composante normale de la vitesse  $\mathbf{V}$  de l'écoulement sur la surface  $S$ .  $U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$  est la composante normale de la vitesse  $\mathbf{U}$  de la surface  $S$ ,  $\mathbf{n}$  étant la normale à la surface  $S$  orientée vers l'écoulement.

*Remarque : si on fait  $\rho = \rho_\infty$  et  $c_0 \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{b}$  et  $b_c$  sont nuls et (58) devient (43) et on retrouve l'équation « incompressible » (43) avec  $\Delta\varphi = 0$  :*

*$\Delta\varphi = V_n \cdot \delta(f) + \text{div}\{\varphi \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f)\}$ . En compressible on trouve donc les mêmes sources qu'en incompressible augmenté de termes qui sont des dérivées temporelles de grandeurs sur la surface  $S$  et de termes non linéaires dans tout le volume de l'écoulement mais on a l'opérateur « propagation d'onde » au premier membre au lieu du Laplacien.*

Les sources de volume « q » sont des termes non linéaires en  $\mathbf{V}$  et  $\varphi$ .

On peut donc chercher des solutions de (52) par approximation successives en partant d'une solution « initiale »  $q = 0$ .

La solution de l'équation

$$\square G = \delta(\mathbf{y}, \tau) \quad (53)$$

est la distribution

$$G(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \tau) = -\delta(g)/(4\pi \cdot r) \quad (54)$$

avec :

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (55)$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \tau - t + r/c_0 \quad (56)$$

où  $\mathbf{y}$ ,  $\tau$  sont les coordonnées et l'instant de la « source » alors que  $\mathbf{x}$ ,  $t$  sont les coordonnées et l'instant de l'observateur.

$\delta(g)$  est nul sauf pour  $g = \tau - t + r/c_0 = 0$ . Au point d'observation (ou point d'écoute)  $M$  situé en  $\mathbf{x}$ , on ressentira au temps «  $t$  » l'effet produit par les sources situées à une distance «  $r$  » à l'instant  $t - r/c_0$ . Ou encore l'état d'une source à l'instant  $\tau$  située à la distance  $r$  du point d'observation  $M$  sera senti en  $M$  à l'instant  $t = \tau + r/c_0$ . C'est ce qu'on appelle le « temps retardé ».

Explicitant le fait que les coordonnées et le temps source sont  $\mathbf{y}$  et  $\tau$ , l'équation (52) doit s'écrire :

$$\square \varphi = V_n \cdot \delta(f) + \text{div}\{\varphi \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(f)\} + (1/c_0^2) \cdot \{ \partial\varphi/\partial\tau \cdot U_n \cdot \delta(f) + \partial/\partial\tau \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \} + q \quad (52')$$

où  $\varphi$ ,  $f$ ,  $V_n$ ,  $U_n$ ,  $q$  ne dépendent que de  $\mathbf{y}$  et  $\tau$ .

Pour  $\mathbf{x}$  et  $t$  fixé,  $g = \tau - t + r/c_0 = 0$  représente une sphère centrée sur le point  $\mathbf{x}$  dont le rayon  $r$  est  $r = c_0 \cdot (t - \tau)$ .

C'est la « collapsing sphere » dont le rayon  $r$  est infini pour  $\tau = -\infty$ , est égal à  $c_0 \cdot t$  pour  $\tau = 0$  et qui diminue en fonction du « temps source »  $\tau$  (à la vitesse du son  $c_0$ ) jusqu'à  $r = 0$  pour  $\tau = t$ .

Pour  $t$  fixé, la « collapsing sphere » dure de  $\tau = -\infty$  à  $\tau = t$ .

La solution de (52') en un point «  $\mathbf{x}$  » à l'instant «  $t$  » est :

$$4\pi \cdot \varphi(\mathbf{x}, t) = - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \{ V_n \cdot \delta(f) + (1/c_0^2) \partial\varphi/\partial\tau \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \cdot (\delta(g)/r) \cdot dy^3 d\tau \quad - A$$

$$\begin{aligned}
& - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \underline{\text{div}}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f)\} .(\delta(g)/r) . dy^3 d\tau && - B \\
& - (1/c_0^2) \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \underline{\partial/\partial\tau}\{\varphi.U_n .\delta(f)\} .(\delta(g)/r) . dy^3 d\tau && - (1/c_0^2).C \\
& - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t q(\mathbf{y},\tau) .(\delta(g)/r) . dy^3 d\tau && (57)
\end{aligned}$$

avec  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  et  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \tau - t + r/c_0$

La deuxième (B) et la troisième intégrales (C) peuvent être transformées afin de « sortir » la dérivation des distributions  $\delta(f)$  et  $\delta(g)$ .

La deuxième (B):

$$\begin{aligned}
\underline{\text{div}}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f)\} .(\delta(g)/r) &= \text{div}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f).\delta(g)/r\} - \varphi.\mathbf{n}.\delta(f).\underline{\text{grad}}\{\delta(g)/r\} \\
&= \text{div}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f).\delta(g)/r\} - \varphi.\mathbf{n}.\delta(f).\underline{\text{grad}}_y(1/r).\delta(g) - \varphi.\mathbf{n}.\delta(f).(1/r).\underline{\text{grad}}_y\{\delta(g)\}
\end{aligned}$$

$$\underline{\text{grad}}_y(1/r) = \mathbf{r}/r^3$$

$$\underline{\text{grad}}_y\{\delta(g)\} = \{d(\delta)/dg\} .\underline{\text{grad}}_y(g)$$

or  $\underline{\text{grad}}_y(g) = \underline{\text{grad}}_y(r)/c_0 = - (1/c_0)(\mathbf{r}/r)$  car  $\underline{\text{grad}}_y(r) = - \mathbf{r}/r$  d'une part

et  $\underline{\partial}\{\delta(g)\}/\underline{\partial}t = \{d(\delta)/dg\} .\underline{\partial}g/\underline{\partial}t = - d(\delta)/dg$  puisque  $\underline{\partial}g/\underline{\partial}t = -1$  d'autre part.

$$\text{Donc } \underline{\text{grad}}_y\{\delta(g)\} = (1/c_0)(\mathbf{r}/r) . \underline{\partial}\{\delta(g)\}/\underline{\partial}t$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\underline{\text{div}}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f)\} .\{\delta(g)/r\} &= \text{div}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f).\delta(g)/r\} - \varphi.(\mathbf{n}.\mathbf{r}/r^3) .\delta(f) .\delta(g) \\
&\quad - (1/c_0) .(\varphi.\mathbf{n}.\delta(f)/r) . \underline{\partial}/\underline{\partial}t\{\mathbf{r}/r\} .\delta(g)
\end{aligned}$$

Comme  $\varphi$ ,  $U_n$  et  $\delta(f)$  ne dépendent pas de  $t$  (mais de  $\mathbf{y}$  et  $\tau$ ) on a finalement :

$$\begin{aligned}
\underline{\text{div}}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f)\} .\{\delta(g)/r\} &= \text{div}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f).\delta(g)/r\} - \varphi.(\mathbf{n}.\mathbf{r}/r^3) .\delta(f) .\delta(g) \\
&\quad - (1/c_0) . \underline{\partial}/\underline{\partial}t\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f)/r\} .(\mathbf{r}/r) .\delta(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \underline{\text{div}}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f)\} .(\delta(g)/r) . dy^3 d\tau &= \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \text{div}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f).\delta(g)/r\} . dy^3 d\tau \\
&- \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi.(\mathbf{n}.\mathbf{r}/r^3) .\delta(f) .\delta(g) . dy^3 d\tau - (1/c_0) . \underline{\partial}/\underline{\partial}t \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi.\mathbf{n}.\delta(f)/r .(\mathbf{r}/r) .\delta(g) . dy^3 d\tau
\end{aligned}$$

Dans cette expression  $\iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \text{div}\{\varphi.\mathbf{n}.\delta(f).\delta(g)/r\} . dy^3 d\tau = \iint_{S_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi.\mathbf{n}.\delta(f).\delta(g)/r . \mathbf{n}_\infty . dy^2 d\tau$  en appliquant le

théorème de Gauss. La surface  $S_\infty$  (de normale  $\mathbf{n}_\infty$ ) est une surface située à très grande distance des surfaces  $S$  des corps en mouvement où  $\varphi = 0$ , elle est donc nulle et finalement on a pour « B » :

$$\text{« B »} = - (1/c_0) . \underline{\partial}/\underline{\partial}t \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi.\mathbf{n}.\delta(f)/r .(\mathbf{r}/r) .\delta(g) . dy^3 d\tau - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi.(\mathbf{n}.\mathbf{r}/r^3) .\delta(f) .\delta(g) . dy^3 d\tau$$

La troisième (C)

De la même manière :

$$\underline{\partial}/\underline{\partial}\tau\{\varphi.U_n.\delta(f)\} .(\delta(g)/r) = \underline{\partial}/\underline{\partial}\tau\{\varphi.U_n.\delta(f).( \delta(g)/r)\} - \{\varphi.U_n.\delta(f)\} . \underline{\partial}/\underline{\partial}\tau\{(\delta(g)/r)\}$$

$= \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot (\delta(g)/r) \} + \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{ (\delta(g)/r) \}$

puisque  $\frac{\partial g}{\partial \tau} = - \frac{\partial g}{\partial t}$ . Comme  $\varphi$ ,  $U_n$  et  $\delta(f)$  ne dépendent pas de  $t$  (mais de  $\mathbf{y}$  et  $\tau$ )

on peut sortir la dérivation par rapport à  $t$  et on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \cdot (\delta(g)/r) = \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot (\delta(g)/r) \} + \frac{\partial}{\partial t} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot \delta(g)/r \}$$

et

$$\begin{aligned} \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \cdot (\delta(g)/r) \cdot dy^3 d\tau &= \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot \delta(g)/r \} \cdot dy^3 d\tau \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \delta(g)/r \cdot dy^3 d\tau \end{aligned}$$

or (la première)  $\int_{\tau=-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot (\delta(g)/r) \} \cdot d\tau = \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot \delta(g)/r \}_{\tau=t} - \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot \delta(g)/r \}_{\tau=-\infty}$

avec  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \tau - t + r/c_0$  (56)

Pour  $\tau = t$ ,  $\delta(g)$  est nul sauf sur une sphère de rayon nul :  $\delta(g) = \delta(r)$

$\iiint_{V_\infty} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot \delta(r)/r \} dy^3$ . Cette intégrale est nulle. Pour le montrer il suffit de prendre comme élément de

volume  $dy^3$  une sphère de rayon  $r = \varepsilon$  très petite :  $dy^3 = 4\pi \cdot r^2 \cdot dr$

$$\iiint_{V_\infty} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot \delta(r)/r \} dy^3 = \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \}_{r=0} \cdot \int_{r=0}^{\varepsilon} (\delta(r)/r) \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot dr$$

$$= \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \}_{r=0} \cdot 4\pi \cdot \int_{r=0}^{\varepsilon} \delta(r) \cdot r \cdot dr = 0$$

Pour  $\tau \rightarrow -\infty$ ,  $r \rightarrow \infty$  et  $\{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot \delta(g)/r \} = 0$  car  $\varphi = 0$  à l'infini. Cette première intégrale est nulle. On a donc

$$\iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \cdot (\delta(g)/r) \cdot dy^3 d\tau = - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \delta(g)/r \} \cdot dy^3 d\tau$$

$$= - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \delta(g)/r \} \cdot dy^3 d\tau$$

on a « C » :

$$\ll C \gg = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot \delta(g)/r \cdot dy^3 d\tau$$

Et (57) s'écrit :

$$4\pi \cdot \varphi(\mathbf{x}, t) = - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \{ V_n \cdot \delta(f) + (1/c_0^2) \partial \varphi / \partial \tau \cdot U_n \cdot \delta(f) \} \cdot (\delta(g)/r) \cdot dy^3 d\tau \quad \ll -A \gg$$

$$+ (1/c_0) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi \cdot \mathbf{n} \cdot (\delta(f)/r) \cdot (\mathbf{r}/r) \cdot \delta(g) \cdot dy^3 d\tau + \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/r^3) \cdot \delta(f) \cdot \delta(g) \cdot dy^3 d\tau \quad \ll -B \gg$$

$$- (1/c_0^2) \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi \cdot U_n \cdot \delta(f) \cdot \delta(g)/r \cdot dy^3 d\tau - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t q(\mathbf{y}, \tau) \cdot (\delta(g)/r) \cdot dy^3 d\tau \quad \ll -(1/c_0^2) \cdot C \gg$$

avec  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  et  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \tau - t + r/c_0$

On a finalement :

$$4\pi \cdot \varphi(\mathbf{x}, t) = - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t V_n/r \cdot \delta(f) \cdot \delta(g) \cdot dy^3 d\tau - (1/c_0^2) \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \partial \varphi / \partial \tau \cdot U_n/r \cdot \delta(f) \cdot \delta(g) \cdot dy^3 d\tau$$

$$\begin{aligned}
& \ll \text{a} \gg \qquad \qquad \qquad \ll \text{b} \gg \\
& + (1/c_0) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi \cdot \{ \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} / r^2 - U_n / (c_0 \cdot r) \} \cdot \delta(f) \cdot \delta(g) \cdot dy^3 d\tau \\
& \qquad \qquad \qquad \ll \text{c} \gg \\
& + \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t \varphi \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} / r^3) \cdot \delta(f) \cdot \delta(g) \cdot dy^3 d\tau - \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t q(\mathbf{y}, \tau) \cdot \delta(g) / r \cdot dy^3 d\tau \quad (58) \\
& \qquad \qquad \qquad \ll \text{d} \gg \qquad \qquad \qquad \ll \text{e} \gg
\end{aligned}$$

$$q(\mathbf{y}, \tau) = \partial b_c / \partial t + \text{div}(\mathbf{b}) ; b_c = 1 - \rho / \rho_0 - (1/c_0^2) \partial \varphi / \partial \tau ; \mathbf{b} = (1 - \rho / \rho_0) \cdot \mathbf{grad}_y(\varphi) \quad (17)$$

avec  $\mathbf{U}$  vitesse et  $\mathbf{n}$  la normale de la surface  $S$  en  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{grad}_y(\varphi)$  ;

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \tau - t + r/c_0 ; r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

#### 5.4 « Collapsing sphere ». Comparaison au cas incompressible.

Les quatre premiers termes du potentiel  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  (« a » à « d ») sont des intégrales du type :

$$I(\mathbf{x}, t) = \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=-\infty}^t Q(\mathbf{y}, \tau) \cdot \delta(f) \cdot \delta(g) \cdot dy^3 d\tau \quad (59)$$

$f(\mathbf{y}, \tau) = 0$  décrit la surface de discontinuité  $S$  et  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \tau - t + r/c_0$  avec  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ .

$\delta(f)$  est nul sauf sur la surface de l'aile  $f = 0$ .

$\delta(g)$  est nul sauf pour  $g = \tau - t + r/c_0 = 0$ . Au point d'observation (ou point d'écoute)  $M$  situé en  $\mathbf{x}$ , on ressentira au temps «  $t$  » l'effet produit par les sources situées à une distance «  $r$  » à l'instant  $t - r/c_0$ . Ou encore l'état d'une source à l'instant  $\tau$  située à la distance  $r$  du point d'observation  $M$  sera senti en  $M$  à l'instant  $t = \tau + r/c_0$ . C'est ce qu'on appelle le « temps retardé ».

Pour  $\mathbf{x}$  et  $t$  fixé,  $g = \tau - t + r/c_0 = 0$  représente une sphère centrée sur le point  $\mathbf{x}$  dont le rayon  $r$  est  $r = c_0 \cdot (t - \tau)$ .

C'est la « collapsing sphere » dont le rayon  $r$  est égal à  $c_0 \cdot (t - \tau)$ . Il est infini pour  $\tau \rightarrow -\infty$  et  $r$  diminue en fonction du « temps source »  $\tau$  (à la vitesse du son  $c_0$ ) jusqu'à  $r = 0$  pour  $\tau = t$ . C'est ce qu'on appelle la « collapsing sphere » (Cf. Farassat).

Le produit  $\delta(f) \cdot \delta(g)$  est nul sauf sur la courbe  $\Gamma$  qui est l'intersection de la surface  $S$  (l'aile par exemple définie par  $f = 0$ ) avec la « collapsing sphere »  $g = 0$ . Quand  $\tau$  varie de  $-\infty$  à  $t$ , cette courbe  $\Gamma$  engendre une surface  $\Sigma$  et l'intégrale (59) devient une intégrale sur la surface  $\Sigma$  :

$$I(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} Q(\mathbf{y}, \tau) d\Sigma \quad (60)$$

Exemple subsonique :

Imaginons le point  $M$  (placé à l'origine des coordonnées) et un élément plan de la surface  $S$  placé à l'abscisse  $X$  à  $\tau = \tau_1$  consistant en un petit disque de rayon  $R$  (schéma ci-dessus). Cet élément, perpendiculaire au plan du dessin (le disque est vu par la tranche), se déplace de droite à gauche à la vitesse  $\mathbf{U}$  ( $U < c_0$ ). Quelle est l'influence de cet élément au point  $M$  à l'instant  $t$  ?

Pour  $\tau = \tau_1$ , la « coll. sphere » de rayon  $r_1 = c_0 \cdot (t - \tau_1)$  centrée en  $M$  atteint l'élément de  $S$  et le coupe suivant un cercle  $\Gamma_1(\tau_1)$  de rayon  $R_1 = R$  correspondant au bord du disque :

$$X^2 + R^2 = c_0^2 \cdot (t - \tau_1)^2.$$

Plus tard, à l'instant  $\tau > \tau_1$ , la « coll. sphere » de rayon  $r_\tau = c_0 \cdot (t - \tau)$  (plus petit que  $r_1$ ) centrée en  $M(x)$  coupe l'élément de  $S$  (qui s'est déplacé) suivant un cercle  $\Gamma_\tau(\tau)$  de rayon  $R_\tau$  tel que  $[X - U \cdot (\tau - \tau_1)]^2 + R_\tau^2 = c_0^2 \cdot (t - \tau)^2$ .

Si  $\tau = \tau_2$  tel que  $X - U \cdot (\tau_2 - \tau_1) = c_0 \cdot (t - \tau_2)$  alors  $R_2$  est nul et pour  $\tau > \tau_2$  la sphère ne coupe plus  $S$ .

On trouve  $c_0 \cdot (\tau_1 - \tau_2) = [(X^2 + R^2)^{1/2} - X] / (1 - M)$ . La surface  $\Sigma$  est un cône dont la base est le disque de rayon  $R$  situé à  $X$  et de hauteur  $c_0 \cdot (\tau_1 - \tau_2)$ .

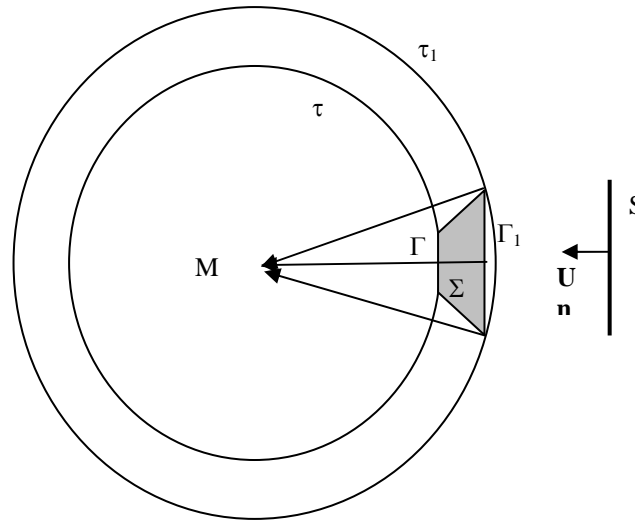


Figure 10 : Exemple de surface  $\Sigma$  perçue en  $M$ .

Prenons un exemple. Si  $U = c_0$ ,  $M = 1$  (l'élément de surface  $S$  se rapproche du point  $M$  à la vitesse du son  $c_0$ ) il faut refaire le calcul qui donne  $c_0 \cdot (\tau_1 - \tau_2) = X$ . Dans ce cas, la surface  $\Sigma$  est un cône dont la base est le disque de rayon  $R$  et dont le sommet est au point  $M$  (hauteur  $X$ ).

Si  $U = 0$ ,  $M = 0$ , l'intersection de la « coll. sphere » avec le disque est un cercle. De  $\tau = -\infty$  à  $t$ , la surface  $\Sigma$  engendrée par ces cercles couvrent tout le disque et  $\Sigma$  est identique à l'élément  $S$ .

Il faut noter que  $c$  est le rapport  $U/c_0$  qui intervient  $c$  est à dire le nombre de Mach de la surface  $S$  par rapport à l'état du gaz au repos (à l'infini)  $p_0, \rho_0, T_0$ .

*Remarque :*

*En changeant le sens de la vitesse de la surface  $S$ , on peut remplacer la « collapsing sphere » par une « expanding sphere » dont le rayon croît de 0 à l'infini. Si la vitesse de l'élément de surface est supersonique ( $|U/c_0| > 1$ ) il peut ne pas y avoir d'intersection ( $\Sigma$  est nulle).*

L'intégrale  $I(\mathbf{x}, t)$  peut donc s'écrire :

$$I(\mathbf{x}, t) = \iiint_{V_\infty} \int_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} Q(\mathbf{y}, \tau) \cdot \delta(f) \cdot \delta(g) dy^3 d\tau = \iint_{\Sigma} Q(\mathbf{y}) d\Sigma$$

C'est l'influence sur le point  $M(\mathbf{x})$  au temps  $t$  des sources réparties sur la surface  $\Sigma$  générée par la « coll. sphere » quand son rayon varie de  $\infty$  à 0.

On peut imaginer à partir de ce schéma comment l'orientation de la normale  $\mathbf{n}$  à  $S$  par rapport au point  $M$  (le produit  $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}$ ), sa vitesse de déplacement par rapport à  $M$  (le produit  $\mathbf{U}\cdot\mathbf{r}$ ) et la direction du déplacement par rapport à  $S$  (déplacement normal ou tangentiel à  $S$  c'est à dire le produit  $\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}$ ) modifient la surface  $\Sigma$ .

La surface  $\Sigma$  est la surface  $S$  vue du point  $M$  mais déformée par les effets de la propagation ce qui complique un peu les calculs. Rappelons que ceci est valable dans un repère absolu où  $\varphi$  et  $\mathbf{V}$  sont nuls à l'extérieur de la surface  $S$  (et à l'infini).

Dans l'expression (58) de  $\varphi$ , les intégrales « a » et « d » sont les mêmes qu'en incompressible à condition d'intégrer sur la surface  $\Sigma$  et non sur la surface « physique »  $S$ . Les autres contributions (« b » et « c ») sont « purement » compressibles (elles s'annulent si  $c_0 \rightarrow \infty$ ) et l'intégrale de volume « e » contient les termes non linéaires :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{y}, \tau) &= \partial \mathbf{b}_c / \partial \tau + \text{div}(\mathbf{b}) & (17) \\ b_c &= 1 - \rho / \rho_0 - (1/c_0^2) \partial \varphi / \partial \tau \\ \mathbf{b} &= (1 - \rho / \rho_0) \cdot \text{grad}_{\mathbf{y}}(\varphi) \end{aligned}$$

Connaissant  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{V} = \text{grad}(\varphi)$  en tout point  $\mathbf{x}$  donné par (58), alors l'équation (13)

$$\partial \varphi / \partial t + \mathbf{V}^2 / 2 + c^2 / (\gamma - 1) = \text{Constante} = c_0^2 / (\gamma - 1) \quad (13)$$

donne  $c(\mathbf{x}, t)$  (et  $T(\mathbf{x}, t)$ ) et les équations (8) et (9) fournissent  $p(\mathbf{x}, t)$  et  $\rho(\mathbf{x}, t)$ .

La condition supplémentaire est que les chocs, s'ils existent, soient faibles (voir page 11 la relation de Hugoniot) pour utiliser (13).

Ces équations sont compatibles avec l'existence de zones où l'écoulement est localement faiblement supersonique ( $V/c > 1$ ).

Mais la diminution de vitesse d'un écoulement supersonique qui doit se faire à travers un choc (même faible), c'est à dire une discontinuité, ne peut être directement prédite par cette théorie. Il faut donc détecter les chocs éventuels et « surveiller » les régions où l'écoulement qui est accéléré est devenu supersonique et ralentit. On « capte » ainsi les chocs où on peut éventuellement remplacer la relation (13) par la relation de Hugoniot (27).

### 5.5 Résolution numérique et applications.

Le principe est le même qu'en incompressible. La surface  $S$  se compose de l'aile  $S_A$  et du sillage  $S_W$ . On discrétise la surface  $S_A$  en  $N_A$  éléments plans (panneaux ou facettes) et  $S_W$  en  $N_W$  éléments plans où  $\varphi$  est constant (« panel method »).

Le volume proche de l'aile (où le terme non linéaire peut être important) est discrétisé en  $N_V$  éléments de volume.

On démarre le calcul (itération « 0 ») avec une géométrie de sillage initial défini « a priori » et on néglige le terme non linéaire.

L'équation (58) conduit à un système linéaire de  $N_A$  équations à  $N_A$  inconnues (les valeurs de  $\varphi$  sur chaque panneau de l'aile).

On obtient  $\varphi$  sur chaque facette et le gradient de  $\varphi$  (sur la surface de l'aile ou dans le volume) s'exprime à partir des valeurs de  $\varphi$  sur les facettes voisines. On utilise un schéma « centré » dans les zones subsoniques et « décentré vers l'aval » dans les zones supersoniques pour capter le choc de recompression.

Le sillage à l'itération «K+1» est le sillage à l'itération «K» ayant subi une déformation, et les termes non linéaires sont ceux déduit des résultats de l'itération « K ».

On procède par itération jusqu'à ce que le résultat de l'itération «K+1» soit suffisamment voisin de l'itération «K» auquel cas on admet qu'on a une solution convergée du problème.

On connaît alors  $\varphi$  et  $\mathbf{V} = \mathbf{grad}(\varphi)$  sur l'aile, le sillage et donc en tout point de l'espace d'où on déduit  $p$ ,  $\rho$  et  $T$  ou  $c$ .

On peut calculer  $\varphi$  à grande distance de l'aile et en déduire le bruit rayonné puisque l'équation (58) « contient » l'acoustique non linéaire.

## 6. Et en pratique ?

La figure 11 montre la répartition de la pression ( $-C_p$ ) sur un profil d'aile en translation à  $M = 0.8$  et à incidence nulle. Elle montre comment varie l'opposé de la pression ( $-C_p$ ) en fonction de l'abscisse  $x$  (normalisée par la corde du profil). Il y a accélération et détente depuis le bord d'attaque jusqu'au choc de re-compression (à  $x$  voisin de 0.45) où l'écoulement ralentit. L'écoulement est supersonique pour  $.04 < x < 0.45$ .

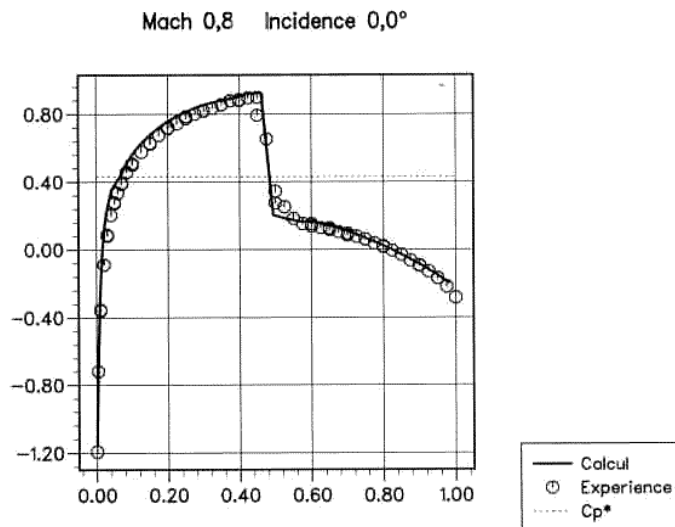


Figure 11 : profil en translation à  $M = 0.8$ . Répartition de la pression ( $-C_p$ ) en fonction de l'abscisse.

La figure 12 représente une pale de rotor vue de dessus (l'axe est à gauche de la figure) tournant dans le sens anti-horaire. La vitesse de l'extrémité (à droite sur la figure) correspond à un nombre de Mach  $M_{ext} = U_{ext}/c_0 = 0.8$ . Les courbes représentent les iso-Mach à l'intrados et à l'extrados, les couleurs le nombre de Mach de l'écoulement à l'extrados. L'écoulement présente une « bulle » supersonique ( $M = V/c > 1$ ) vers le bord d'attaque et à l'extrémité.

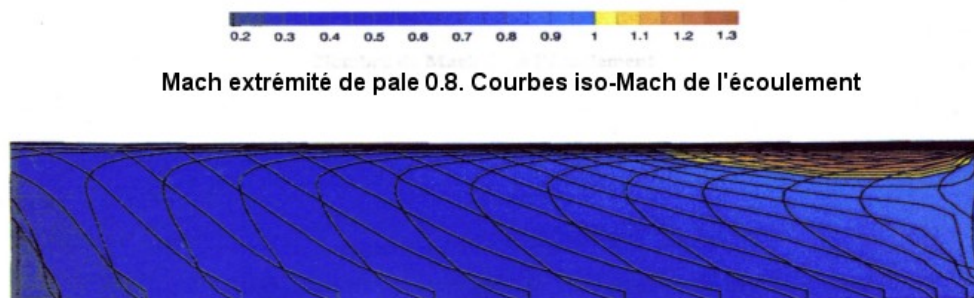


Figure 12 : Pale de rotor transsonique : bulle supersonique.

La figure 13 montre (vue de dessus) une aile simple rectangulaire en translation vers la gauche à  $M = 0.8$  (en rouge) qui se rapproche d'un observateur placé en bas à gauche de la figure.

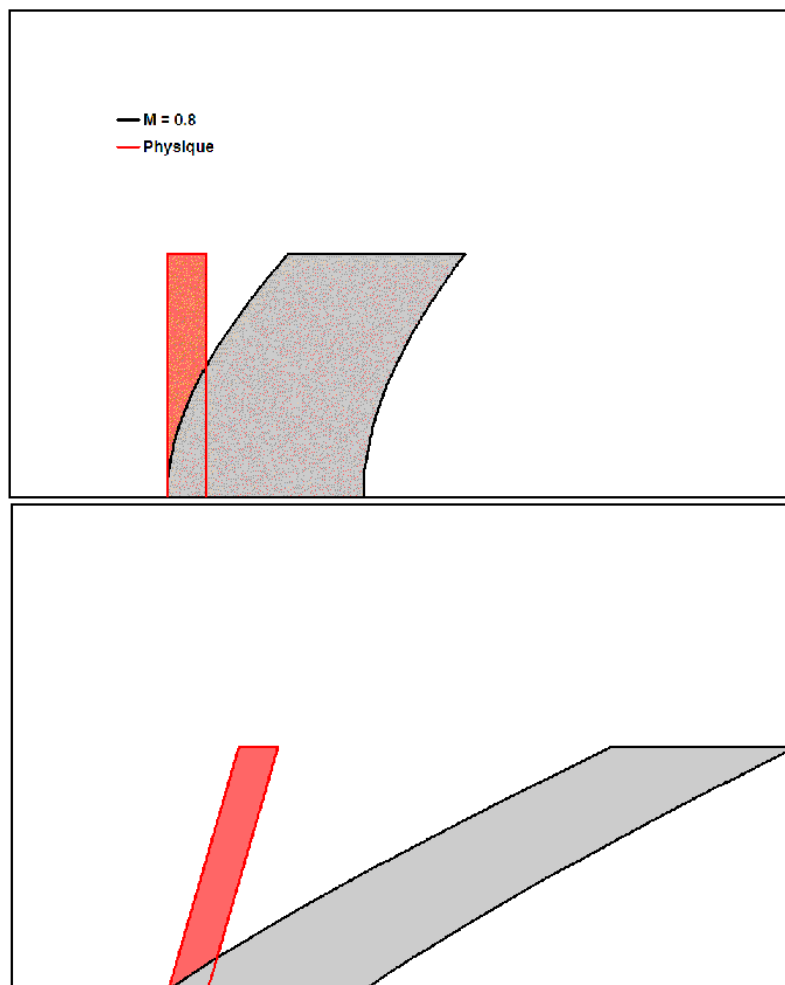


Figure 13 : aile réelle (en rouge) et aile «acoustique» (en gris) perçue par un observateur placé en bas à gauche.

La figure du bas montre une aile «en flèche» en translation à la même vitesse ( $M = 0.8$ ) En gris on a représenté l'aile telle que perçue à un instant donné « t » par l'observateur. La « déformation » de l'aile «acoustique» est due à la différence de temps de propagation entre un point de l'aile et l'observateur (compressibilité de l'air). On voit que dans le premier cas, la corde de l'aile est considérablement augmentée et que son allongement (envergure/corde) est très diminué. Il en résulte une réduction de la finesse due aux effets de compressibilité. L'allongement pour l'aile «en flèche» est bien moins réduit et donc les effets de la compressibilité sur « l'allongement aérodynamique » sont atténués.

C'est pourquoi les avions de ligne qui volent en croisière à un nombre de Mach voisin de 0.8 (comme le MD83 par exemple) ont tous des ailes en flèche et que l'allongement de l'aile «physique» est plus grand que pour les avions des années quarante moins rapides (comme le F4U Corsair ou le Spitfire) ou encore les avions d'aéroclub.

